土木学会第54回年次学術講演会（平成11年９月）

I－A88

３次元静弾性問題における高速多重極境界要素法

前田建設工業　正会員　○　玖津見 敏広
福井大学工学部　正会員　　福 井 卓 雄

1　はじめに

従来の境界要素法の弱点は, 問題の自由度 N に対して計算コスト (必要記憶容量, 計算量) が膨大にかかることであった。これを克服するための一つの工夫が高速多重極法の適用である。高速多重極法は N 個の点の相互作用を高速に評価する方法で, これまでにいくつかの問題において境界要素法に適用され, 解析を効率化してきた。ここでは, 3 次元静弾性問題の境界要素法に高速多重極法を適用し, コスト $O(N)$ の解析を実現する。

2　3 次元静弾性問題の境界要素法

3 次元空間中の領域 B で変位 $\boldsymbol{u}$ が Navier の方程式を満足し, 境界∂B 上で与えられた境界条件を満足するとする。境界値問題は次のようになる。

$$G\left[u_{i,jj}+\frac{1}{1-2\nu}u_{j,ji}\right]+X_i=0 \quad \text{in } B, \qquad u_i=\hat{u}_i \quad \text{on } \partial B_1, \qquad T_{ij}u_j=\hat{s}_i \quad \text{on } \partial B_2 \tag{1}$$

ここに, $\boldsymbol{X}$ は物体力, G はせん断弾性係数, ν は Poisson 比, $T_{ij}u_j$ は境界上の応力ベクトルで, 応力と応力の作用素を

$$\sigma_{ij}=\Sigma_{ijk}u_k=G\left(\frac{2\nu}{1-2\nu}\delta_{ij}u_{k,k}+u_{i,j}+u_{j,i}\right) \tag{2}$$

とすれば, $T_{ij}u_j=n_k\Sigma_{kij}u_j$ となる。Somigliana の公式より境界積分方程式は

$$\frac{1}{2}u_j(\boldsymbol{x})=\int_{\partial B}G_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})T_{jk}u_k(\boldsymbol{y})\,dS_y-\int_{\partial B}S_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,u_j(\boldsymbol{y})\,dS_y \tag{3}$$

$$G_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\frac{1}{4\pi G}\left[\frac{\delta_{ij}}{r}+\frac{1}{4(1-\nu)}r_{,ij}\right], \qquad S_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=T^y_{jk}G_{ki}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \tag{4}$$

となる。 $G_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, $S_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ はそれぞれ Navier の方程式の基本特異解, 第二基本特異解である。境界積分方程式 (3) を離散化すれば $\boldsymbol{u}$ または $\boldsymbol{Tu}$ を未知数とする線形代数方程式が導かれる。この解析には $O(N^2)$ の必要記憶容量と $O(N^2)$ ～ $O(N^3)$ の計算量が必要になるので, 大規模な問題を扱うことが困難となる。そこで, 方程式を高速に解くために繰り返し解法を用い, かつ以下で構成する高速多重極法を使って式 (3) 右辺の積分を評価する方法が高速多重極境界要素法である。

3　3 次元静弾性問題の高速多重極法

高速多重極法を構成するには, 弾性場の多重極表現と局所表現が必要となる。2 次元静弾性問題では, 弾性場の表現に最も扱いやすい複素解析関数を使って効率よくこれらの表現を得ている [1]。これに習って, 3 次元静弾性問題においては物体力のない場合に調和関数となる Neuber-Papkovich 関数を導入して高速多重極法を構成する。

弾性場を Neuber-Papkovich 関数 $\boldsymbol{\phi}, \chi$ で表現すると, 変位とそれに対応する応力は $\kappa=3-4\nu$ として

$$u_i=\frac{1}{2G}\left[\kappa\phi_i-x_j\phi_{j,i}-\chi_{,i}\right] \tag{5}$$

$$\sigma_{ij}=2\nu\phi_{k,k}\delta_{ij}+(1-2\nu)(\phi_{i,j}+\phi_{j,i})-x_k\phi_{k,ij}-\chi_{,ij} \tag{6}$$

で与えられる。 $\boldsymbol{y}$ 点に集中荷重 $\boldsymbol{P}$ が作用するときの基本特異解の変位場 $G_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})P_j(\boldsymbol{y})$ に対応する Neuber-Papkovich 関数を求めると

$$\phi^G_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\frac{P_i}{8\pi(1-\nu)|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}, \qquad \chi^G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=-\frac{y_iP_i}{8\pi(1-\nu)|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|} \tag{7}$$

キーワード：高速多重極境界要素法, Neuber-Papkovich 関数
連絡先：〒910-8507 福井市文京 3–9–1 福井大学工学部建築建設工学科, Tel. 0776-27-8596(直通), Fax. 0776-27-8746

となる。また，第二基本特異解による変位場 $S_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})U_j(\boldsymbol{y})$ に対応する ϕ^S，χ^S は

$$\phi_i^S(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{G}{8\pi(1-\nu)}\left[\frac{2\nu}{1-2\nu}n_jU_j\frac{\partial}{\partial y_i}\left(\frac{1}{r}\right) + (n_iU_j + n_jU_i)\frac{\partial}{\partial y_j}\left(\frac{1}{r}\right)\right]$$
$$\chi^S(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = -\frac{(1+\nu)G}{4\pi(1-\nu)(1-2\nu)}n_jU_j\frac{1}{r} - y_i\phi_i^S(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \tag{8}$$

となる。ϕ^G，χ^G はニュートンポテンシャルの場として，ϕ^S，χ^S はニュートンポテンシャルの場と双極子場の線形結合として表される。よって，ϕ，χ は $\boldsymbol{x}$ の極座標 (r,θ,ϕ) を使って，3次元ポテンシャル問題 [2] と同じ多重極展開

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\boldsymbol{M}_n^m\frac{Y_n^m(\theta,\phi)}{r^{n+1}}, \qquad \chi(\boldsymbol{x}) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}N_n^m\frac{Y_n^m(\theta,\phi)}{r^{n+1}} \tag{9}$$

と局所展開

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\boldsymbol{K}_n^m r^n Y_n^m(\theta,\phi), \qquad \chi(\boldsymbol{x}) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}L_n^m r^n Y_n^m(\theta,\phi) \tag{10}$$

によって表現できる [3]。ここに，Y_n^m は球面調和関数である。ϕ，χ が調和関数であるから，3次元ポテンシャル問題の多重極法を用いて効率よく高速多重極法を構成できるというわけである。

4 解析結果

計算効率確認のために，無限体中の球形空洞問題を一重層ポテンシャル法で解析した。境界条件は無限遠に一軸応力を与えている。要素数に対する解析時間 (Fig–1) は $O(N)$ 程度の増加を示し，要素数が2000あたりから従来法よりも速くなっている。高速多重極法では係数の引渡しにより計算を行うので，必要記憶容量 (Fig–2) も $O(N)$ 程度に省略することができている。

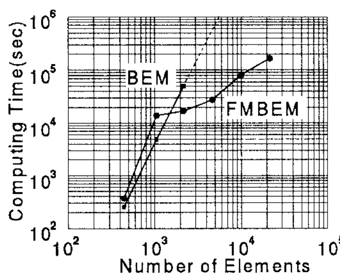

Fig-1

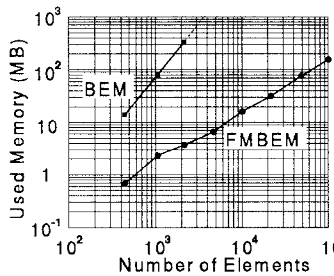

Fig-2

応用問題として交差トンネルの解析を行った。既設トンネルの下を新設トンネルが施工される場合を想定し，トンネルの間隔を20m, Young率10,000, Poisson比0.4, $\sigma_{xx}=\sigma_{yy}=\sigma_{zz}=-100$ としている。新設トンネルの進行にともない既設トンネル周辺に起こる応力の相対変化，つまり既設トンネルのみ存在するときの応力に対する各ステップでの応力を Fig–3 に示す。応力 (外側が圧縮) の変化は，まず新設トンネルの進行してくる方から現れる。これは切羽によるせん断応力がもたらす変化である。切羽が通り過ぎると，次はトンネルが空洞として作用し，周辺に引張応力を加えている様子がよく現れている。

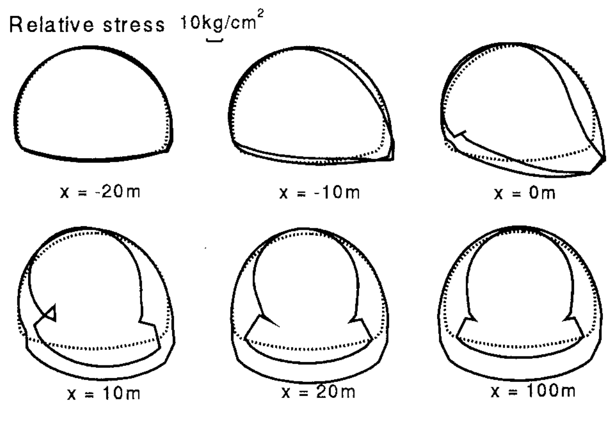

Fig - 3

参考文献

[1] 福井卓雄, 持田哲郎：高速多重極境界要素法の2次元静弾性問題への応用, 境界要素法論文集, **13** pp. 131–136, 1996.

[2] 福井卓雄, 玖津見敏広：3次元ポテンシャル問題問題における多重極境界要素の数値評価について, BEM テクノロジー コンファレンス論文集, **8** pp. 43–48, 1998.

[3] 福井卓雄, 玖津見敏広：高速多重極境界要素法による3次元静弾性問題の解析, 境界要素法論文集, **15** pp. 99–104, 1998.