

I - A87

2次元散乱問題における高速多重極境界要素法の効率化

大成建設 正会員 ○ 勝本 順三
福井大学工学部 正会員 福井 卓雄

1 はじめに

境界要素法に高速多重極法を適用した高速多重極境界要素法を2次元 Helmholtz 方程式の境界値問題に適用し, 散乱問題の解析に応用する。これまでの研究において, 本手法は, 計算量および必要記憶容量を飛躍的に減少させ, 大規模な問題において有効に適用されることが示された [3]。しかし, 波数の大きな問題を扱う場合, 多重極展開に必要な項数が大きくなり, 係数の変換計算に多くの計算が必要となる。そこで, 変換計算に高速 Fourier 変換 (FFT) を利用し, 計算をさらに高速化する。また, アルゴリズムの構成には, 広範囲の波数に対して対応できるものとした。

2 Helmholtz 方程式の境界要素法

関数 u が, 2次元空間中の領域 B 内で Helmholtz 方程式 $(\nabla^2 + k^2)u = 0$ (k は波数) を満足し, その境界 ∂B 上で条件 $u = \tilde{u}$ (on ∂B_1), $\partial u / \partial n = \hat{s}$ (on ∂B_2) を満足する境界値問題を考える。

Helmholtz 方程式の基本特異解および第2基本特異解は次のように与えられる。

$$G(x, y) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|x - y|), \quad S(x, y) = \frac{\partial G}{\partial n_y}(x, y) = -\frac{ik}{4} \frac{\partial |x - y|}{\partial n_y} H_1^{(1)}(k|x - y|) \quad (1)$$

ここに, $H_n^{(1)}$ は第1種 n -次の Hankel 関数である。領域 B を無限領域と考え, 入射波を $\tilde{u}$ として, 境界 ∂B による散乱問題を考える。このとき, 波動場 u は, 一般化された Green の公式により, 境界積分方程式は

$$C(x)u(x) = \tilde{u}(x) + \int_{\partial B} G(x, y) \frac{\partial u}{\partial n}(y) dS_y - \int_{\partial B} S(x, y) u(y) dS_y \quad (2)$$

で表される。ここに, C は点 x の位置に依存するパラメータで, x が領域内のとき $C = 1$, 領域外のとき $C = 0$, 滑らかな境界上にあるとき $C = 1/2$ の値をとる。境界値に適切な近似を導入して式 (2) を離散化し, 与えられた境界値に対し未知の境界値を決定して, 関数 u を近似的に決定する方法が境界要素法である。

3 高速多重極法の適用

高速多重極法の基本的な考えは, 多数の波動源からなる波動場をそれと等価な1つの多重極による波動場に置き換えて計算効率を上げようとするものである。この多重極による波動源のグループ化は, 領域全体を含む正方形を考え, それを順次4等分したセルを作ることによりできる4分木構造上で行なわれる。ここでは, アルゴリズムの詳細については省略し(文献 [3] 参照), アルゴリズムの構成に必要な, 場の多重極展開および局所展開, 係数の変換関係式を簡単に紹介する。

波動場 u の波源付近の点における多重極展開, 観測点付近の点における局所展開を

$$u(x) = \frac{i}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} M_n H_n^{(1)}(kr) e^{in\theta}, \quad u(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} L_n J_n(kr) e^{-in\theta} \quad (3)$$

で表す。ここに, (r, θ) は展開点を中心とした極座標であり, J_n は n -次の Bessel 関数である。多重極点の移動 (M2M), 多重極展開から局所展開への変換 (M2L), 局所展開点の移動 (L2L) による係数の変換関係は, それぞれ, 次のようになる。

$$\tilde{M}_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} M_m J_{n-m}(k\rho) e^{-i(n-m)\phi} \quad (\text{M2M})$$

$$L_n = \frac{i}{4} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m M_m H_{n+m}^{(1)}(k\rho) e^{i(n+m)\phi} \quad (\text{M2L}) \quad (4)$$

$$\tilde{L}_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^{m-n} L_m J_{m-n}(k\rho) e^{-i(m-n)\phi} \quad (\text{L2L})$$

キーワード 高速多重極境界要素法, Helmholtz 方程式, 高速 Fourier 変換

連絡先 〒910-8507 福井県福井市文京 3-9-1, Tel. 0776-27-8596, Fax. 0776-27-8746

ここに、 (ρ, ϕ) は新しい点から見た古い点の極座標であり、 $(\cdot)$ は新しい点における係数を表す。
また、(3), (4) での無限和は、有限項 $(\pm p)$ の和で近似するものとする。

4 FFT を利用した係数変換

変換関係 (4) はいずれも繰り込みの形をしている。したがって、(4) を Fourier 変換してやれば、像空間においてこれらは関数の積として計算できる。

M_n, L_n を係数とする Fourier 級数を

$$M(\xi) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} M_n e^{in\xi}, \quad L(\xi) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} L_n e^{in\xi} \quad (5)$$

とする。Bessel 関数 $J_n(k\rho)$ と Hankel 関数 $H_n^{(1)}(k\rho)$ を係数とする Fourier 級数を

$$j(\xi) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(k\rho) e^{in\xi} = e^{ik\rho \sin \xi}, \quad h(\xi) \sim \frac{i}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_n^{(1)}(k\rho) e^{in\xi} \quad (6)$$

で定義する。関係 (4) の Fourier 級数を計算し、上の関数を使って表現すれば、関係

$$\tilde{M}(\xi) = M(\xi) j(\xi - \phi) \quad (M2M)$$

$$L(\xi) = M(-\xi - \pi) h(\xi + \phi) \quad (M2L) \quad (7)$$

$$\tilde{L}(\xi) = L(\xi) j(-\xi - \phi - \pi) \quad (L2L)$$

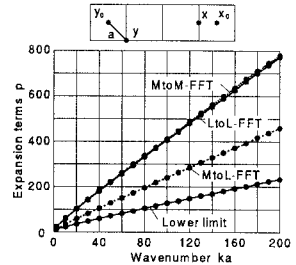


図-1 利用できる項数の範囲

が得られる。FFT を使えば、 $M_n \Rightarrow M(\xi) \Rightarrow \tilde{M}(\xi) \Rightarrow \tilde{M}_n$ のように係数変換 (4) を高速に実行できる。 $\pm p$ の有限和を計算する場合、 ξ として円上に P 個の等分点をとる。ここに、 P は M2M, L2L において $P = 2^n > 2p + 1$, M2L において $P = 2^n > 4p + 1$ (n は自然数) を満足する最小の整数とする。M2L において P が変わるの、 $h(\xi)$ が $\pm 2p$ の有限和で計算する必要があるためである [4]。

しかし、波数によって利用できる項数の範囲は決まっている。図-1 は、波源 y や観測点 x 、多重極点 y_0 、局所展開点 x_0 の配置を、第 2 近傍を近傍としたとき最も条件の悪くなる状態に置き、解の精度が 10^{-8} を保持する展開項数の範囲を波数によってプロットしたものである。3 つの係数変換に共通する下限 (Lower limit) とそれぞれの上限が存在する。また、図からはわかりにくい、計算できる波数にも下限がある。この範囲内で展開項数を定めないと解は収束しない。

ポテンシャル評価は、Greengard のアルゴリズム [1] に基づいて行う。しかし、全てのセルに対して展開項数を一定として計算する従来のアルゴリズムでは、図-1 の結果を満足させることができない。そこで、波数 k とセルの大きさ a (セルの対角線の半分の大きさ) とに対して展開項数 p を決定するルールを作る。ここでは、

$$p = \begin{cases} 20 & ka < 5 \\ 1.2ka + 15 & ka \geq 5 \end{cases} \quad (8)$$

とし、波数 $ka < 5$ では (4) を直接使い、 $ka \geq 5$ では FFT による係数変換を使って計算するものとする。つまり、セルレベルによって展開項数が変わるわけである。

5 円形散乱体の解析

硬い円形散乱体 (要素数 5,000) の解析を波数 10 ~ 500 について行ない、計算量の波数に対する依存性を調べた。結果を図-2 に示す。FMA は直接 (4) を使った場合、FMA-FFT は FFT により (7) を使った場合の結果である。FMA は、波数が大きくなるにつれて計算時間が急激に増加しているが、FMA-FFT では、その増加が抑えられている様子がわかる。また、セルが小さい場合、展開項数は少なくすむので、記憶容量も減少する結果が得られた。

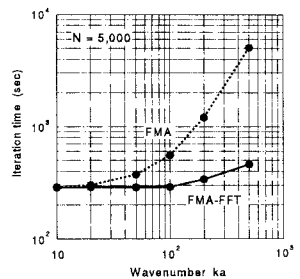


図-2 解析に要した計算時間

参考文献

- [1] Greengard, L.: The Rapid Evaluation of Potential Fields in Particle Systems. Cambridge, MA: MIT Press, 1988.
- [2] Rokhlin, V.: Rapid solution of integral equations of scattering theory in two dimensions, J. Computational Physics, **86**, pp. 414-439. 1990.
- [3] 福井卓雄, 勝本順三: 2 次元 Helmholtz 方程式のための高速多重極アルゴリズムと境界要素法への応用, 境界要素法論文集, 第 14 巻, pp. 81-86. 1997.
- [4] 福井卓雄, 勝本順三: 高速 Fourier 変換を援用した高速多重極境界要素法による 2 次元散乱問題の解析, 境界要素法論文集, 第 15 巻, pp. 93-98. 1998.