土木学会第54回年次学術講演会（平成11年9月）

I－A85 メッシュフリー法における変位関数と重み関数

東京電機大学 学生員 金井塚淳一*
東京電機大学 学生員 轟真祐*
東京電機大学 正会員 井浦雅司*

1 はじめに

エレメントフリーガラーキン法（Element Free Galerkin Method，EFGM）はBelytschkoら[1]により開発され，その特徴は，FEMと異なり要素分割を必要とせず，さらに変位関数の係数が節点における物理量でないことである．移動最小二乗法を用いて変位関数を作成する場合には，これまでスプライン関数や指数関数が重み関数として多く用いられている．ここでは，まず，著者ら[2]が用いてきた新たな変位関数の完全性について考察し，さらに重み関数の解に与える影響を，静的線形問題(片持ちはり）と動的非線形問題（Flying Spaghetti）について考察する．

2 変位関数

Belytschkoらが提案している変位関数u^hは，移動最小二乗法を用いて，

$$u^h(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{N}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{u} = [u_1, u_2, \ldots, u_n] \tag{1}$$

となる．ここに$\boldsymbol{N}(\boldsymbol{x})$は形状関数，$\boldsymbol{u}$は節点値ベクトル，$N$は節点数である．本研究では，部材両端の節点値を物理量である節点変位に変換した変位関数を用いることとし[2]，以下のように表される．

$$u^h = \boldsymbol{N}^*(\boldsymbol{x})u^*, \quad \boldsymbol{u}^* = [U_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, U_n] \tag{2}$$

ここに，$N^*(x)$は新たな形状関数，u^*は部材両端の物理量である節点変位U_1,U_nと，物理量でない梁の各節点における節点値$u_i (i = 2 \sim n-1)$により表されるベクトルである．

式(2)で用いられている形状関数$\boldsymbol{N}^*(\boldsymbol{x})$の完全性について調べる．式(1)の形状関数が完全性を満足していれば次式が成立する．

$$\sum_{i=1}^{n} N_i(x) x_i^k = x^k \tag{3}$$

ここで，$k = 1, 2, ..$である．さて，式(3)が成立すると，新たな形状関数について次式が成立する．

$$\sum_{i=1}^{n} N_i^*(x) x_i^k = N_1^*(x)(x_1^k - x^k) + N_n^*(x)(x_n^k - x^k) + \sum_{i=1}^{n} N_i(x) x_i^k \tag{4}$$

すなわち，$K = 0$の時に右辺は1となり，それ以外のkについては，右辺の第1，2項がゼロとならず，新たな形状関数の完全性は成立しないことがわかる．

ここで示したように，新たな形状関数の完全性は$k = 0$を除き満足されない．しかしながら，この事実が式(2)を用いることを否定しているわけではない(文献[3]参照)．文献[2]でも示されているように，形状関数として式(2)を用いても解の収束性は数値的に確認されている．

3 重み関数

式(1)で与えられる変位関数は移動最小二乗法により求められており，ここでは以下の2つの重み関数について解に与える影響を調べる．

$$(W1) \quad : \quad w(d_I) = 1 - 6\left(\frac{d_I}{r}\right)^2 + 8\left(\frac{d_I}{r}\right)^3 - 3\left(\frac{d_I}{r}\right)^4$$

$$(W2) \quad : \quad w(d_I) = \frac{e^{-(d_I/c)^2} - e^{-(r/c)^2}}{\left(1 - e^{-(r/c)^2}\right)}$$

ここで，d_Iは節点x_Iと評価点xとの距離($d_I = \| x - x_I \|$)であり，rは，重み関数のサポートする領域の半径である．サポート半径rは，評価点xの周りの節点に対する重み関数の影響を決定するための重要な要素であり，形状関数に大きな影響を与える．また，式(4)におけるCは，

$$C = \alpha C_I \tag{5}$$

で表される変数であり，C_Iは節点間の距離に，αは任意に定義される．

4 定式化

EFGMによる定式化はFEMのそれとほぼ同じである．すなわち，静的問題も動的問題もエネルギ法に基

*KeyWords:EFGM,幾何学的非線形,離散化手法
* 埼玉県比企郡鳩山町石坂 東京電機大学理工学部建設工学科

礎をおいており，ここではひずみエネルギ関数としてTimoshenkoはりのそれを用いている．動的問題ではハミルトンの原理を用いて運動方程式を導出する．それを一階の微分方程式に直し，Runge-Kutta法を用いて数値積分を行う．その際に，質量マトリクス，内力ベクトルの積分は各セル毎にガウス積分を用いる．なお，重み関数におけるサポート半径rに含まれない節点に関する重み関数は零とおいている．それゆえ，質量マトリクス，内力ベクトルは，ガウス積分の積分点数とサポート半径rの影響を受ける．また，セルの分割方法も数値解の精度に影響を与える．

4.1　梁の線形解析

解析対象は図１に示す片持ち梁である．梁の長さL=10cm，積分は10個のセルを使って行い，各積分点の数は3とし，積分方法はガウス積分を用いている．解析結果を図２に示すが，縦軸 W はEFG法の数値解をBernulli-Eulerはりの解 $ql^4/8EI$ で無次元化したものである．これより，重み関数としてW2を用いた場合，αが小さい時に数値解はやや小さ目の値に収束し，αが大きい時は解が振動しながら収束していくことがわかる．また，重み関数としてW1を用いた時には良好な収束が得られることがわかる．

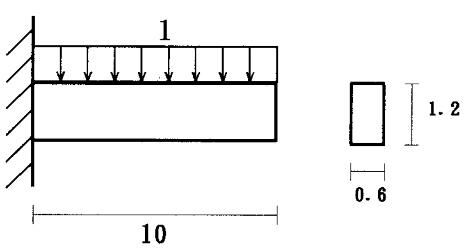

図１．片持ち梁 (単位：cm,kgf)

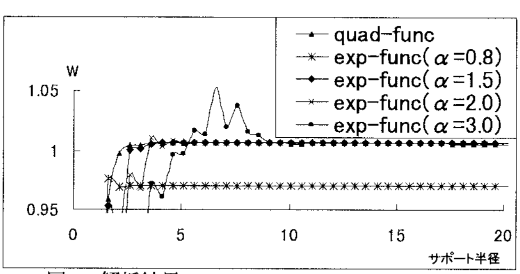

図2. 解析結果

4.2　Flying Spaghetti Problem

解析対象は，図3に示すFlying Spaghetti Problemである．梁の両端は自由であり，その右端に集中荷重とモーメントを2.5秒間加える．Simoら及びIuraらにより，同じ問題が有限要素法により解析されているが，その結果と今回取り上げたEFG法の結果を，節点数，セルの数，積分点の数，サポート半径の点に注目して比較検討した結果を図4に示す．動的問題においても，重み関数として指数関数を用いると，妥当な解を得るためにはαの値に注意する必要があることがわかる．なお，重み関数W1を用いた数値結果は文献[4]にあり，良好な結果が得られている．

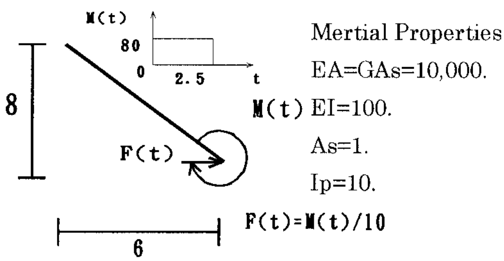

図3. Flying Spaghetti Problem

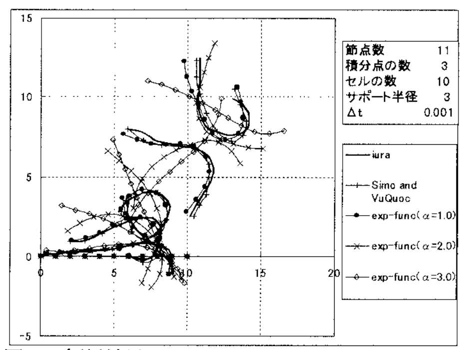

図4．解析結果

5　まとめ

著者らが用いてきた変位関数の完全性について考察し，$K=0$の場合のみ完全性が満足されることを示した．次に，梁の静的問題において重み関数の影響を調べ，指数関数を重み関数に用いる場合にはαの値の選択に注意を要することが確認された．

参考文献

[1] T.Belytscko, Y. Y. Lu and L. Gu, Int. J. Numr. Meth. Engrg., Vol.37, 229-256,1994.

[2] 井浦・庭山, 構造工学論文集, Vol.43A(1997年3月)

[3] T.Belytscko, et al. Comput. Meth. Appl. Mech. Eng,139, 3-47,1996.

[4] 金井塚・井浦，土木学会第53回年次学術講演会，I-A218，1998.