Ⅰ－A84　三角級数基底の選点法による近似解析法

（財）鉄道総合技術研究所　正会員　山下彰彦
同　上　正会員　村石 尚

１．はじめに

工学問題での近似解析法を考えると、差分法によるもの、フーリエ級数を用いたり変数分離法などがあるが、この二十年余については有限要素法、境界要素法での研究が盛んに行われている。また、近年ではフリーエレメント法、粒子法などの計算法への取り組みも見られる。本文では、三角級数を基底関数とした近似解析法を取り上げ、この近似解析法の特色とその適用について述べる。

２．板曲げ問題

地下立体交差においてはカルバートボックスと称して鉄筋コンクリート製の板組構造を設ける、つまり、鉄道線路の載った盛土の内部を貫いて道路を設けることがよくある。このカルバートボックス構造は板組の３次元構造で、板曲げが生じるものであるが、現時点での設計計算は軸長方向の構造をスライスに切って２次元モデルで計算しているのが現状である。板構造を考える際、板曲げは不可欠なものであるが、板曲げ問題は現在でもなお研究が継続中である。そこで、板曲げについて触れることにする。

薄板の場合、横荷重 q と板の中央面内に働く力の総合作用下の板曲げ支配方程式は次式で与えられる（図１参照）[1]。w は鉛直変位で、D は板曲げ剛性である。

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}=\frac{1}{D}(q+N_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+N_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+N_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} \quad \cdots\cdots(1)$$

（１）既存解法例

均一な横荷重と均一な引張力の総合作用を受けている単純支持辺を持った長方形板（図２参照）の場合については文献1)でその解が次のように求められている。

均一な横荷重 q_0 を二重三角級数の形

$$q=\frac{16q_0}{D\pi^2}\sum_{m=1,3,5,\cdots}^{\infty}\sum_{m=1,3,5,\cdots}^{\infty}\frac{1}{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi}{b} \quad \cdots\cdots(2)$$

に表す。次に、単純支持辺での境界条件を満たすものとして鉛直変位 w を設定する。

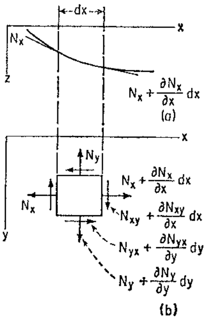
$$w=\sum\sum a_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \quad \cdots\cdots(3)$$

その次に、境界条件を満たす変位 w 設定式(3)、荷重式(2)、$N_y=0$ 及び $N_{xy}=0$ を支配方程式(1)に代入することによって、板の撓み面

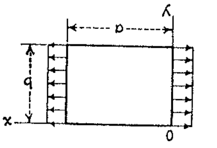
$$w=\frac{16q_0}{\pi^6 D}\sum_{m=1,3,5,\cdots}^{s}\sum_{n=1,3,5,\cdots}^{t}\frac{1}{mn\left[\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2+\frac{N_x m^2}{\pi^2 D a^2}\right]}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \quad \cdots\cdots(4)$$

が求められている。

この解(4)は、単純支持境界条件について、境界上で鉛直変位 w 且つ曲げモーメントが零であって、解析領域内全てで板曲げ支配方程式を満たしている。



図－１ 長方形板での力成分



図－２ 長方形板

特定の板曲げ問題は変数分離法を使って三角級数を用いて解かれるが、特定以外のものについては有限要素法で取り扱われることが多い。有限要素法の場合、要素分割し各要素毎にそれぞれ形状関数を設定するのであるが、その形状関数は、領域内において鉛直変位 w の連続を満たし、節点において勾配連続を満たすが要素間での撓み角の連続性を満たさないものである[2]。

（２）三角級数基底の選点法での解法

境界条件が特定のもの、例えば単純支持なものでは式(3)のように鉛直変位 w を正弦三角関数の級数和と設定できる。しかし、境界上で鉛直変位があったりあ

キーワード　三角級数基底の選点法、板曲げ
〒185-8540　東京都国分寺市光町２－８－38　電話 042-573-7263　Fax042-573-7398

るいは一定でない曲げモーメントが作用するなどの場合は、鉛直変位 w を正弦三角関数の級数和と設定したり、x と y との変数分離形とすることが困難である。

そこで、板の中心点に原点をとり、解析領域 $\{(x,y) : -\pi \le x \le \pi, -\pi \le y \le \pi\}$ における板鉛直変位 w を次のような三角級数で設定する。

$$w = \sum_{m=0,1,2,\cdots}^{s} \sum_{n=0,1,2,\cdots}^{t} A_{mn} \cos mx \cos ny + \sum_{m=0,1,2,\cdots}^{s} \sum_{n=0,1,2,\cdots}^{t} B_{mn} \cos mx \sin ny + \sum_{m=0,1,2,\cdots}^{s} \sum_{n=0,1,2,\cdots}^{t} C_{mn} \sin mx \cos ny + \sum_{m=0,1,2,\cdots}^{s} \sum_{n=0,1,2,\cdots}^{t} D_{mn} \sin mx \sin ny \qquad \cdots\cdots(5)$$

鉛直変位 w の式(5)表現では、$A_{mn}, B_{mn}, C_{mn}, D_{mn}$ という *4st 個*の係数が含まれている。ところが、$\sin mx, \sin ny$ は m あるいは n が零だと常に零となるので、(4*st*-2*s*-2*t*+1)個の係数値を決める必要がある。この係数値は、境界上あるいは領域内で有限個の点を選び、その点において、境界条件あるいは領域内で支配方程式を満たすことから(4*st*-2*s*-2*t*+1)個の連立１次方程式を導くことによって求めることができる。

もちろん、この方法は、全ての境界上での境界条件、全ての領域内で支配方程式を満たすものではないが、領域での有限個の点において境界条件、支配方程式を満たすものである。そして、求まる近似解は、領域において鉛直変位 w と勾配連続を満たし、様々な境界条件のものを表現することができるものであって、有限個の点の数を増加させることによって近似度を高めることができる。

３．ポアソン方程式への適用

Ωを２次元空間の連結領域とし、その境界がΓでΓ$_1$とΓ$_2$から構成されているものとする。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f(x,y) = 0 \quad (\Omega内) \quad \cdots\cdots(6)$$

$$u = 0 \quad (\Gamma_1上), \qquad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad (\Gamma_2上) \quad \cdots\cdots(7)$$

ここに、$\boldsymbol{n}$ は法線向く単位ベクトル。

このポアソン方程式の問題の場合、三角級数基底の選点法では前述した板曲げ問題と同様にして解くことができる。

鉛直変位 w を式(5)で取り扱ったように、u を次のように三角級数で設定する。

$$u = \sum_{m=0,1,2,\cdots}^{s} \sum_{n=0,1,2,\cdots}^{t} A_{mn} \cos mx \cos ny + \sum_{m=0,1,2,\cdots}^{s} \sum_{n=0,1,2,\cdots}^{t} B_{mn} \cos mx \sin ny + \sum_{m=0,1,2,\cdots}^{s} \sum_{n=0,1,2,\cdots}^{t} C_{mn} \sin mx \cos ny + \sum_{m=0,1,2,\cdots}^{s} \sum_{n=0,1,2,\cdots}^{t} D_{mn} \sin mx \sin ny \qquad \cdots\cdots(8)$$

(x_i, y_i) を領域Ω内の点であるとする。式(8)から $\partial^2 u/\partial x^2, \partial^2 u/\partial y^2$ を求めて式(6)に代入してから、変形した式(6)で x に x_i を y に y_i の値を入れることによって $A_{mn}, B_{mn}, C_{mn}, D_{mn}$ の連立１次方程式を得る。また、Γ$_1$ 上の座標の点を式(8) の右辺に代入して式値が零とおくことによっても、$A_{mn}, B_{mn}, C_{mn}, D_{mn}$ の連立１次方程式を得る。Γ$_2$上の座標の点を選び、式(8)を一階微分し $\partial u/\partial x, \partial u/\partial y$ を合成して境界条件を満たすようにすることからも A_{mn}, B_{mn}, C_{mn}, D_{mn} の連立１次方程式を得る。これらの連立方程式から係数 $A_{mn}, B_{mn}, C_{mn}, D_{mn}$ を求める。

有限要素法でのポアソン方程式の解法ではガラーキン法によって弱形式化してから解くのが一般的である。そして、u の補間関数設定においては領域内で折れ角を伴うものとなっている。

４．あとがき

境界条件が簡単なものであって領域が円や長方形などのものであれば、境界条件を満たす補間関数を設定することが可能なものがある。しかし、工学上の問題では必ずしも境界条件などが簡単であるとは限らない。三角関数基底の選点法では、境界上あるいは領域内での有限個点において、境界条件あるいは支配方程式を満たすものであって、その設定が容易に行うことができる。また、求められた近似解は、滑らかで無限回微分可能なものである。

参考文献

１）Timoshenko.S.and Woinowsky-Krieger.S. : *Theory of Plate and Shells*, McGraw-Hill, 1959. (長谷川節訳：板とシェルの理論, pp.34～36, pp.102, pp.356～358, ブレイン図書, 1973.)

2)O.C,Zienkiewics, and R.L.Taylor : *The Finite Element Method 4th Edition*, McGraw-Hill, Vol.2,1991. (矢川元基訳者代表：マトリックス有限要素法、pp.2, pp.12～14, 科学技術出版社, 1996.9)