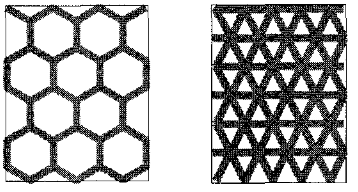
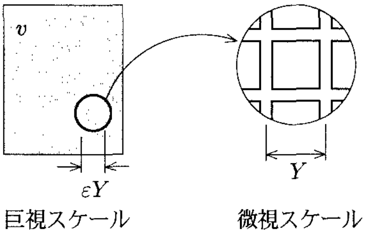
土木学会第54回年次学術講演会（平成11年9月）

I－A83　周期構造を有するセル構造体の分岐解析

宇都宮大学　正員　斉木　功
東北大学　正員　寺田賢二郎
東北大学　正員　池田清宏



図–1　セル構造体



図–2　マルチスケールの概念

1.　まえがき

セル構造体[1)]とは，図–1 に示すような線や面によって閉ざされたセルの集合体である．セル構造体は様々な用途に使用されるが，構造材料に限定すれば，木材は古くから多用されてきた天然のセル構造体であり，軽量かつ高剛性であるため，工学的に重要である．

セル構造体は，その微視構造であるセルを形作る材料のみならず，セルの幾何学的な特性による異方性，あるいは，セル壁の座屈により非常に複雑な力学的特性を有するが，その汎用的な解析方法が確立されていない．著者らは，セル構造体の周期性を仮定し，セルとセル構造体という異なるスケールを結びつけるマルチスケール解法としての均質化法[2)]による解析を試みている[3)]．しかし，均質化法の非線形問題への適用，特に大変形，分岐問題への適用は，まだ実績がほとんどないこと，および局所的な不安定問題における単位構造の適切なモデルについて，未だに十分な議論がなされていない[4),5)]ことを踏まえて，ここでは微視スケールの問題を検討する．

2.　解析方法

解析領域を図–2 に示すような εY の大きさを持つ微小なユニットセルによって周期的に埋め尽くすことができるとする．このような領域において，一般的な有限ひずみの境界値問題

$$\nabla_x\cdot\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{0} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{n}=\underline{\boldsymbol{t}}\quad\text{on } s_t,\qquad \boldsymbol{u}=\underline{\boldsymbol{u}}\quad\text{on } s_u \tag{2}$$

を考える．ここに，$\boldsymbol{\sigma}$ は Cauchy 応力，$\underline{\boldsymbol{t}}$, $\underline{\boldsymbol{u}}$ はそれぞれ与えられる力学的，および幾何学的境界条件である．釣合式 (1) の updated-Lagrange 形式の増分仮想仕事式は

$$\int_v {}_t\dot{\boldsymbol{S}}:\delta\boldsymbol{D}\,\mathrm{d}v+\int_v\boldsymbol{\sigma}:\left(\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\cdot\delta\boldsymbol{L}\right)\mathrm{d}v=\int_{s_t}\dot{\underline{\boldsymbol{t}}}\cdot\delta\dot{\boldsymbol{u}}\,\mathrm{d}s \tag{3}$$

と表される．ここに，${}_t\dot{\boldsymbol{S}}$ は Truesdell の応力速度であり，左下の t は参照時刻を意味する．ここで，構成関係は ${}_t\dot{\boldsymbol{S}}=\boldsymbol{C}:\boldsymbol{D}$ で表されることとしておく．

区分線形化された仮想仕事式 (3) に対しては，形式的には線形の均質化法と同様に定式化を進めることができる．微視スケール変数

$$\boldsymbol{y}\equiv\frac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon} \tag{4}$$

を導入し，変位 $\boldsymbol{u}$ を微視構造のスケール ε に関して漸近展開し，2 変数表示すると

$$\boldsymbol{u}^{\varepsilon}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{u}^0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\varepsilon\boldsymbol{u}^1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\varepsilon^2\boldsymbol{u}^2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\cdots \tag{5}$$

となる．すると，変形速度テンソルは次のように表すことができる．

$$\boldsymbol{D}=\frac{1}{\varepsilon}\boldsymbol{D}_y^0+\left(\boldsymbol{D}_x^0+\boldsymbol{D}_y^1\right)+\varepsilon\left(\boldsymbol{D}_x^1+\boldsymbol{D}_y^2\right)+\cdots \tag{6}$$

ここに，α を巨視スケールを意味する x，もしくは微視スケールを表す y とし，n を正の整数とすると

$$\boldsymbol{D}_\alpha^n\equiv\frac{1}{2}\left\{\boldsymbol{L}_\alpha^n+(\boldsymbol{L}_\alpha^n)^{\mathrm{T}}\right\},\qquad \boldsymbol{L}_\alpha^n\equiv\nabla_\alpha\otimes\dot{\boldsymbol{u}}^n \tag{7}$$

である．これを仮想仕事式 (3) に代入すると，微視スケールの釣合式

$$\begin{aligned}&\int_Y\left(\boldsymbol{C}:\boldsymbol{D}_y^1\right):\delta\boldsymbol{D}_y^1\,\mathrm{d}Y+\int_Y\boldsymbol{\sigma}:\left\{\left(\boldsymbol{L}_y^1\right)^{\mathrm{T}}\cdot\delta\boldsymbol{L}_y^1\right\}\mathrm{d}Y\\&=-\int_Y\boldsymbol{\sigma}:\delta\boldsymbol{D}_y^1\,\mathrm{d}Y-\int_Y\left(\boldsymbol{C}:\boldsymbol{D}_x^0\right):\delta\boldsymbol{D}_y^1\,\mathrm{d}Y\\&\quad-\int_Y\boldsymbol{\sigma}:\left\{\left(\boldsymbol{L}_x^0\right)^{\mathrm{T}}\cdot\delta\boldsymbol{L}_y^1\right\}\mathrm{d}Y\end{aligned} \tag{8}$$

Key Words: セル構造体，周期境界，マルチスケール解析，分岐

〒321-8585 宇都宮市陽東 7-1-2　Tel. 028-689-6210　Fax. 028-689-6230

および巨視スケールの釣合式

$$\begin{aligned}&\int_v \left(\boldsymbol{C} : \boldsymbol{D}_x^0\right) : \delta\boldsymbol{D}_x^0 \,\mathrm{d}v \\ &\quad + \int_{t_v} \boldsymbol{\sigma} : \left\{\left(\boldsymbol{L}_x^0\right)^{\mathrm{T}} \cdot \delta\boldsymbol{L}_x^0\right\} \mathrm{d}v \\ &= \int_{s_t} \dot{\boldsymbol{t}} \cdot \delta\dot{\boldsymbol{u}}^0 \,\mathrm{d}s - \int_{t_v} \boldsymbol{\sigma} : \left\{\left(\boldsymbol{L}_y^1\right)^{\mathrm{T}} \cdot \delta\boldsymbol{L}_x^0\right\} \mathrm{d}v \\ &\quad - \int_v \boldsymbol{\sigma} : \delta\boldsymbol{D}_x^0 \,\mathrm{d}v - \int_v \left(\boldsymbol{C} : \boldsymbol{D}_y^1\right) : \delta\boldsymbol{D}_x^0 \,\mathrm{d}v\end{aligned} \tag{9}$$

を得ることができる．

ここで，線形問題の場合には，単位の巨視ひずみ $\nabla_X \otimes \boldsymbol{u}_0$ に対する微視スケール応答 $\boldsymbol{u}_1$，すなわち特性関数を求め，次いで均質化材料定数を得ることができる．非線型問題に関しては，巨視スケールの釣合式を解く際の各積分点において，１ステップごとに微視スケールの釣合式を解く必要がある．

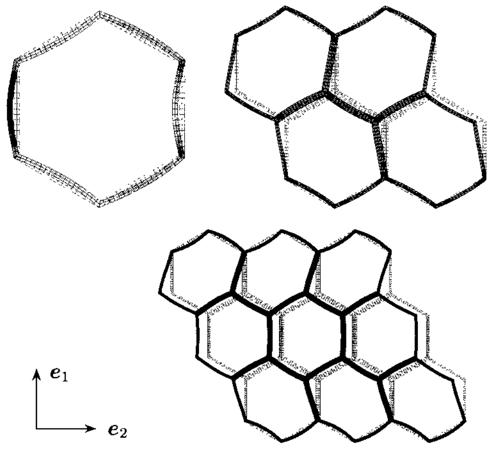
3. 解析結果

平面セル構造体の例として，正六角形ハニカムの解析を行った．壁厚の等しい正六角形ハニカムは，変形が微小であるときは，等方的であるが，セル壁に平行な方向の圧縮により座屈する．１軸圧縮の座屈荷重に関しては，荷重に対して平行でないセル壁の曲げによる弾性拘束を受けるはり柱として解析的に求めることができ，ゴムハニカムの実験結果と良い一致を示す[1)]．その際，はり柱の中点が変曲点となることが重要である．

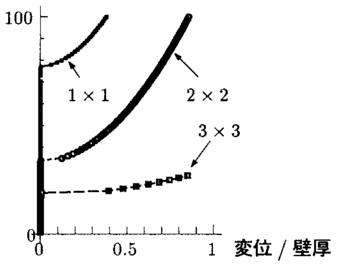
解析モデルは，ユニットセルとして，**図–3** に示すような正六角形のセルが 1, 4, 9 個のものを対象とした．壁厚と長さの比 t/ℓ は 1/8 である．周期境界条件は，それぞれのセルによって空間を埋め尽くすことができるように並べたときに，同じ位置にくる節点の変位が等しくなるような拘束により考慮した．なお，セル壁の構成関係は相対 Kirchhoff 応力の Jaumann 率と変形速度テンソルが等方線形関係で，Poisson 比を 0.3 とした．巨視ひずみ増分を，$\boldsymbol{D}_x^0$ の (2,2) 成分のみ 2×10^{-4} として繰り返し与え，微視スケール解析を行った．

図–4 に巨視ひずみに相当する繰り返し回数と，代表点の x_1 方向の壁厚による無次元化変位の関係を示す．また，**図–3** に座屈後の変形形状を示す．このような座屈不安定問題において，本来有限な値である微視構造の大きさをゼロとする ($\varepsilon \to 0$) ことによって，代表要素におけるセルの数を大きくすればするほど，座屈荷重は小さくなることが指摘されているが[5)]，本解析においても同様の傾向を示すこととなった．

分岐問題を均質化法で扱う際に，どのセルモデルを用いるべきかは，数学的に未解決な問題であるが，ここで扱っている正六角形ハニカムの場合は，**図–3** にあるように，４個のセルを用いた解析による座屈形状が，Gibson ら[1)]の解析および実験と一致しているため，このモデルでの解析が妥当であると考えられる．しかしながら，任意形状の微視構造を有するセル構造体の解析のためには，今後，解析的，および数値的な両方の側面からの更なる研究が必要である．



図–3 セルの座屈形状



図–4 巨視ひずみ - 変位曲線

参考文献

1) Gibson, L.J. and Ashby M.F.（大塚正久訳）：セル構造体，内田老鶴圃，1993.
2) Guedes, J.M. and Kikuchi, N.: Preprocessing and postprocessing for materials based on the homogenization method with adaptive fiinite element methods, *Comput. Meth. in Appl. Mech. Eng.*, Vol.83, pp.143–198, 1990.
3) 斉木　功，寺田賢二郎，池田清宏: 局所的な座屈安定性を考慮したセル構造体のマルチスケール解析，第 48 回理論応用力学講演会講演論文集, pp.387–388, 1999.
4) Triantafyllidis, N. and Bardenhagen, S.: The influence of scale size on the stability of periodic solids and the role of associated higher order gradient continuum models, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.44, No.11, pp.1891–1928, 1996.
5) Müller, S.: Homogenization of nonconvex integral functionals and cellular elastic materials, 99, 189-212, 1887. got Archive for rational mechanics and analysis *Arch. rat. mech. anal.*, 99, pp.189-212, 1887.