

I - A81

拡張 Timoshenko はりの自由振動解析

長岡技術科学大学 学生員 時 譲太
長岡技術科学大学 正会員 林 正
徳山工業高等専門学校 正会員 岩崎英治
川田テクノシステム 正会員 斎藤道生

1. まえがき

Timoshenko はりの自由振動問題は、多数の論文でそのせん断変形と回転慣性の影響について議論がなされている。しかし、曲げねじりによるせん断変形を考慮した拡張 Timoshenko はりの自由振動問題については、あまり研究がなされておらず、その振動特性が明確にされていない。そこで、本報告では拡張 Timoshenko はりの自由振動問題について解析解を求め、 C^0 級のハイラーキ要素と C^1 級のエルミート要素を定式化して、両要素を用いた p 法と h 法の精度を検討する。なお、変位関数や剛性行列は文献 1) を参照されたい。

2. 拡張 Timoshenko はり

(1) 曲げねじり振動 曲げ振動と曲げねじり振動に関する次の無次元パラメータを用いる。

$$Q = p\ell\sqrt{\frac{\rho}{E}}, \lambda_z = \ell\sqrt{\frac{A}{I_z}}, \chi = \frac{EI_p}{GJ}, \mu = \frac{GJ\ell^2}{EI_\omega}, \kappa_y = \frac{E}{k_yG}, \kappa_x = \frac{J}{J_s}, J_s = k_x(I_p - J) \quad (1)$$

ここに、 Q は無次元振動数、 p は固有円振動数、 ρ は質量密度、 ℓ は部材長である。 λ_z は z 軸まわりの細長比、 χ と μ はねじりに関するパラメータで、 A は断面積、 I_z は z 軸まわりの断面 2 次モーメント、 I_p は極断面 2 次モーメント、 I_ω はそり 2 次モーメント、 J はサンブナンのねじり定数である。 E はヤング係数、 G はせん断弾性係数である。また、 κ_y と κ_x は曲げ及びねじりに関するせん断変形パラメータで、 k_y は y 軸方向のせん断補正係数、 J_s は有効せん断ねじり定数¹⁾、 k_x はねじりに対するせん断補正係数である。

はりは 2 軸対称断面材とし、部材軸 x まわりのねじり角を θ_x とすると、拡張 Timoshenko はり理論による曲げねじり振動の式は次のようになる。下線は回転慣性項である。

$$\theta_x^{(4)} + (Q^2 + Q^2\tilde{\chi} - \tilde{\mu})\theta_x'' + Q^2(Q^2\tilde{\chi} - \tilde{\mu})\theta_x = 0, \quad \tilde{\chi} = \frac{\kappa_x}{1 + \kappa_x}\chi, \quad \tilde{\mu} = \frac{1}{1 + \kappa_x}\mu \quad (2)$$

プライム記号は $\tilde{\xi}(=x/\ell)$ による微分を表す。 $GJ_s \rightarrow \infty$ ($\because \kappa_x = 0$) とすると、せん断変形を無視した式になる。

単純支持の場合について式 (2) を解くと、次の振動数が得られる。

$$Q_n = \frac{\omega_n}{\sqrt{\kappa_x\chi}} \left\{ \beta + \kappa_x\chi \mp \sqrt{\beta^2 + \gamma_n\kappa_x(\chi - 1)} \right\}^{1/2}, \quad \hat{Q}_0 = \sqrt{\mu/\kappa_x} \quad (3)$$

$$\beta = \frac{1}{2}(1 + \kappa_x - \kappa_x\chi + \gamma_n), \quad \gamma_n = \frac{\mu\chi}{\omega_n^2}, \quad \omega_n = n\pi \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (4)$$

式 (3) の第 1 式より、2 通りの振動数 $Q_n, \hat{Q}_n$ ($Q_n < \hat{Q}_n$ とする) に対して 2 通りの振動モードが求められる。また、第 2 式に対する振動モードは、ねじり角が 0 でねじり率 ψ が一定なせん断モードである。

(2) ハイラーキ要素 (C^0 級) m を整合質量マトリックスとすると、変位の 7 成分を級数展開したときの第 k, j 項に対する m の小行列 m_{kj} は次式の対角行列になる。

$$m_{kj} = \rho f_{kj} [A \quad A \quad A \quad I_p \quad I_y \quad I_z \quad I_\omega], \quad f_{kj} = \frac{\ell}{2} \int_{-1}^1 N_k N_j d\xi \quad (k, j = 1, 2, \dots, m) \quad (5)$$

ここに、 $N_k(\xi)$ は形状関数に用いたハイラーキ多項式で¹⁾、 ξ は自然座標である。

(3) エルミート要素 (C^1 級) エルミートの補間多項式にせん断変形による補間関数¹⁾を加えると、拡張 Timoshenko 理論による質量マトリックスが求められる。エルミート要素は部材両端のみに節点自由度を有するので、 (14×14) の m を縦振動、曲げ振動などに分けると、曲げねじり振動に対する (4×4) の対称行列 m_ω の上三角部分の各要素 m_{ij} は次式に $\rho\ell$ を掛けたものである。

$$\left. \begin{aligned} m_{11} &= m_{33} = I_p \{7 + (8 + 7\varphi_x)\Phi\} / 21 + 12I_\omega\Phi/\ell^2 \\ m_{12} &= -m_{34} = I_p\ell\{7/2 + (9 + 7\varphi_x)\Phi\} / 84 + I_\omega(1 - 5\varphi_x)\Phi/\ell \\ m_{22} &= m_{44} = I_p\ell^2(7/10 + \Phi) / 84 + I_\omega\{1/3 - (2 + 5\varphi_x)\Phi\} \\ m_{13} &= I_p/2 - m_{11}, \quad -m_{14} = m_{23} = I_p\ell/12 - m_{12}, \quad -m_{24} = I_p\ell^2/60 + I_\omega/6 - m_{22} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$\Phi = 1/10(1 + \varphi_x)^2, \quad \varphi_x = 12(1 + J/J_s)EI_\omega/GJ_s\ell^2 \quad (7)$$

なお、せん断変形の影響を無視するときは、 $\varphi_x = 0$ とすればよい。また、 φ_x に $\varphi_y = 12EI_z/Gk_yA\ell^2$ を用いれば、 z 軸まわりの曲げ振動に対する質量マトリックスが得られる。

表-1 無次元曲げねじり振動数 ($\chi = 10$)

振動数	μ	κ_x	単純支持					固定支持					
			0	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
Q_n	10	0*	—	1.4004	4.4196	9.3693	16.284	25.169	2.4957	6.5292	12.493	20.411	30.294
		0	—	1.3360	3.7423	6.8183	10.140	13.517	2.3562	5.4008	8.8565	12.391	15.902
		1	—	1.1993	2.6395	4.0846	5.5167	6.9401	1.3462	2.6588	4.0901	5.5346	6.8630
		100	—	1.0371	2.0813	3.1241	4.1665	5.2087	1.0410	2.0806	3.1241	4.1668	5.2085
	30	0*	—	1.1453	3.0237	5.9315	9.9455	15.087	1.6968	4.1540	7.6552	12.260	17.986
		0	—	1.1269	2.8425	5.2101	8.0500	11.176	1.6640	3.8700	6.6393	9.7777	13.119
		1	—	1.0991	2.4554	3.8979	5.3487	6.7925	1.2727	2.5640	3.9497	5.3529	6.7860
		100	—	1.0298	2.0764	3.1206	4.1638	5.2066	1.0393	2.0759	3.1208	4.1651	5.2062
	100	0*	—	0.6021	1.8180	2.8773	3.9055	4.9217	0.9984	1.9967	2.9952	3.9936	4.9920
		0	—	1.0413	2.3466	4.0955	6.3819	9.2496	1.2963	2.8860	4.9457	7.5544	10.748
		1	—	1.0362	2.3016	3.9249	5.9307	8.2839	1.2890	2.8237	4.7197	6.9809	9.5606
		100	—	1.0329	2.2273	3.5667	4.9808	6.4242	1.1671	2.3969	3.7089	5.0805	6.4879
$\hat{Q}_n$	10	1	3.162	4.517	7.100	9.995	13.002	16.060	4.5043	7.1726	9.9925	13.017	16.056
		10	1.000	3.298	6.363	9.478	12.607	15.740	3.2983	6.3631	9.4783	12.607	15.740
		100	0.316	3.157	6.291	9.430	12.570	15.711	3.1575	6.2911	9.4783	12.570	15.711
	30	1	5.477	6.375	8.447	11.018	13.816	16.732	6.3833	8.4404	10.905	13.818	16.635
		10	1.732	3.591	6.520	9.584	12.686	15.804	3.5897	6.5197	9.5842	12.686	15.804
		100	0.548	3.189	6.307	9.441	12.578	15.718	3.1890	6.3070	9.4407	12.578	15.718
	100	1	10.000	10.525	11.934	13.924	16.269	18.837	10.501	11.882	13.990	16.276	18.804
		10	3.162	4.463	7.040	9.946	12.962	16.026	4.4670	7.0370	9.9453	12.962	16.026
		100	1.000	3.297	6.362	9.478	12.606	15.740	3.2970	6.3623	9.4777	12.606	15.740

3. p 法と h 法の精度

ハイラーキ要素による p 法とエルミート要素による h 法の精度を調べる。曲げ振動については省略する。

(1) 縦振動 片持ばりの縦振動を、5 次式と 10 次式を用いたハイラーキ要素と、5 要素と 10 要素に分割したエルミート要素で計算したときの解析解に対する無次元振動数 Q_n の誤差 (%) を図-1 に示す。h 法では自由度数を 2 倍にすると精度は 4 倍になるが、p 法では $10^4 \sim 10^7$ 倍になって収束性のよいことが分かる。

(2) 曲げねじり振動 パラメータ μ と κ_x を変化した場合の無次元振動数 $Q_n, \hat{Q}_n$ の値を表-1 に示す。 $\kappa_x = 0^*$ はせん断変形と回転慣性項を省略した値で、 $\kappa_x = 0$ では回転慣性項を考慮している。表-1 より、固有振動数 Q_n は高次モードほどねじりせん断パラメータ κ_x の値が大きくなるにつれて固有振動数は小さくなり、単純支持よりも固定支持の方が影響が大きい。また、ねじり定数比 μ が小さい程、せん断変形による影響が現れる。

10 次式を用いたハイラーキ要素と 10 要素に分割したエルミート要素で計算した両端単純支持ばりと固定ばりの曲げねじり振動数 Q_n の誤差を図-2,3 に示す。縦振動と同様に、h 法に比べて p 法の精度はよいが、高次モードになるとその差は少なくなる。

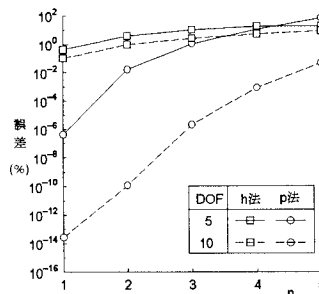


図-1 片持ばりの縦振動数の誤差

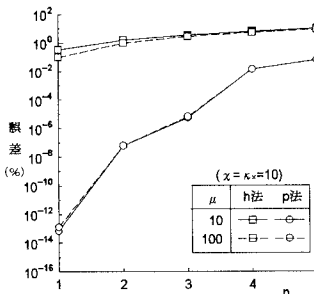


図-2 単純ばりの曲げねじり振動数の誤差

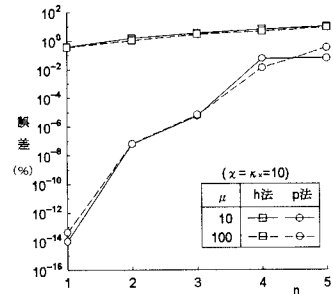


図-3 固定ばりの曲げねじり振動数の誤差

4. p 法と h 法の比較

p 法と h 法による自由振動解析について以下のことがいえる。

a) 変位関数を区分的に近似する h 法に比べて、高次関数を用いる p 法では離散化誤差が小さくなることから、収束性は格段に優れている。ただし、ある次数以上の高次関数 (4 次以上) を用いないとその効果は現れない。

b) せん断変形を考慮すると h 法の精度は悪くなるが、 C^0 級要素を用いた p 法は逆によくなるので、ハイラーキ要素による p 法はせん断変形を考慮した解析に適している。

c) p 法による骨組構造解析では、内部自由度を事前に縮約すれば全体解析における自由度数はエルミート要素と同じになるので、数値計算の効率化を計ることができる。

大学院生の須藤光紀君 (現 川田工業勤務) と学部学生の嘉指智子君の協力を得たことに對して謝意を表する。

1) 林 正・岩崎英治：ハイラーキ要素による骨組構造解析，土木学会論文集，No.570/I-40，pp.163-174，1997.7.