

I-A80

Differential Quadrature法を用いた
長方形板の振動解析

大同工業大学工学部 正員 水澤富作

1. はじめに 1971年にBellman¹⁾により提案されたDifferential Quadrature法(DQM)は、最近偏微分方程式を数値的に解く解法として、多くの分野で用いられている²⁾。構造解析への適用は、比較的新しく、1988年のBertらの研究³⁾が挙げられる。DQMは、梁や板などの基礎方程式を境界条件を満たすように数値的に解く一手法である。DQMは、変位関数の導関数を領域に設けた全ての離散点での関数値の重み付き線形和として表される数値補間多項式により近似し、支配方程式を線形代数方程式に置き換える手法である。離散点での関数値のTaylor級数展開に基づく差分法に対して、DQMは関数値の補間近似を適用しており、また一般化された選点法の近似概念と似た手法である。

本文では、Lagrange多項式を補間関数に用いたDQMの長方形薄板の振動解析への適用について検討を行っている。本手法の収束性や解析精度などの数値安定性について示す。

2. 解析手法 Fig. 1に示すような相対する2辺が単純支持された長方形薄板の自由振動方程式は、Levy法を用いると次に示す常微分方程式で与えられる。式の定式化には、無次元座標系を用いる。 $\xi=x/a$, $\eta=y/b$ (1) ここで、 a, b は長さとお幅である。

長方形薄板の自由振動方程式は、 $\partial^4 W / \partial \xi^4 + 2\beta^2 \partial^4 W / \partial \xi^2 \partial \eta^2 + \partial^4 W / \partial \eta^4 = \omega^2 (\rho h a^4 / D) W$ (2)

で表される。ここで、 $\beta=a/b$, $D=Eh^3/[12(1-\nu^2)]$ である。 η -軸に平行な2辺を単純支持と仮定すると、たわみは、次式で仮定される。 $W(\xi, \eta) = \sum Y(\eta) \sin(m\pi \xi)$; $m=1, 2, \dots, \infty$ (3)

したがって、式(3)を式(2)に代入すると、次式の常微分方程式になる。

$$(m\pi)^4 Y(\eta) - 2\beta(m\pi)^2 d^{(2)} Y(\eta) / d\eta^2 + \beta^4 d^{(4)} Y(\eta) / d\eta^4 = \omega^2 (\rho h a^4 / D) Y(\eta) \quad (4)$$

ここで、 ρ は密度、 h は板厚、 ω は円振動数である。DQMでは、式(4)で表される $Y(\eta)$ の離散点 j での (r) 次の導関数は、解析領域に等間隔に設けた全ての離散点(N)で表される重み関数を用いて次式で表される。

$$d^{(r)} Y(\eta) / d\eta^r = \sum_{j=1}^N A^{(r)}_{ij} Y_j; \quad j, i=1, 2, \dots, N \quad (5)$$

ここで、 $A^{(r)}_{ij}$ は r 次の重み係数であり、 $Y_j = Y(\eta_j)$ 、 N は η 軸方向に設けられた離散点の数である。また、Lagrange補間多項式 $\Pi(\eta)$ を用いれば、(1)次の重み係数は、

$$A^{(1)}_{ik} = \Pi(\eta_i) / (\eta_i - \eta_k) \Pi(\eta_k); \quad k \neq i, \quad k=1, 2, \dots, N \quad (6)$$

$$\text{ただし、} \Pi(\eta_i) = \prod_{v=1, v \neq i}^N (\eta_i - \eta_v), \quad \Pi(\eta_k) = \prod_{v=1, v \neq k}^N (\eta_k - \eta_v) \quad (7)$$

で与えられる。重み係数の r 次の導関数は、Shuら³⁾により提案された漸化式を用いれば、式(6)で求めた $A^{(1)}_{ik}$ より、次式で表される。すなわち、 $2 \leq r \leq (N-1)$ に対して、

$$A^{(r)}_{ij} = r [A^{(r-1)}_{ij} A^{(1)}_{ik} - A^{(r-1)}_{ik} / (\eta_i - \eta_k)]; \quad k \neq i, \quad i, k=1, 2, \dots, N$$

$$A^{(r)}_{ij} = \sum_{v=1}^N [A^{(r)}_{iv}] ; \quad i=1, 2, \dots, N_0. \quad \text{ただし、} 1 \leq r \leq (N-1) \quad (8)$$

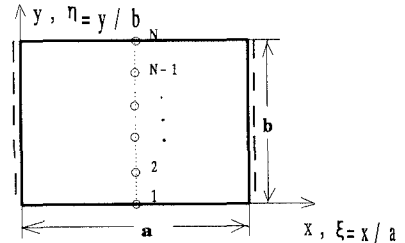


Fig. 1 Rectangular plate and coordinates

Table 1. The effect of N on the convergence of frequency parameter, $\omega = \omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$ of rectangular plates: SS-CC

a/b	N	DOF	Modes					
			(1,1)	(2,1)	(1,2)	(2,2)	(3,1)	(1,3)
1.0	7	3	29.43	55.62	57.20	88.86	103.6	84.68
	9	5	28.96	54.89	76.01	98.97	102.6	116.6
	11	7	28.95	54.89	68.92	98.97	102.3	122.1
	13	9	28.95	54.75	69.37	94.64	102.2	130.5
	15	11	28.95	54.74	69.32	94.59	102.2	129.0
Leissa ⁴⁾			28.95	54.74	69.32	94.59	102.2	129.1
1.5			(1,1)	(2,1)	(3,1)	(1,2)	(2,2)	(4,1)
	7	3	57.45	80.22	125.1	120.8	150.5	181.9
	9	5	56.33	79.08	123.5	163.8	182.9	189.8
	11	7	56.35	78.99	123.2	145.1	169.5	189.3
	13	9	56.35	78.98	123.2	146.4	170.2	189.1
Leissa ⁴⁾			56.35	78.98	123.2	146.3	170.1	189.1

(i, j) is mode number in the ξ - and η -direction, respectively.

キーワード: Differential Quadrature Method, 自由振動解析、長方形板
連絡先: 〒457-0818 名古屋市南区白水町40番地 TEL 052-612-5571

式(5)～式(8)のDifferential Quadratureの関係式を用いて、式(4)を書き換えると、 ξ 一軸に平行な2辺でそれぞれ2つの境界条件が導入されるので、内部離散点(N-4)で次の関係式が求められる。

$$(\pi)^4 Y_i - 2\beta^2 (\pi)^2 \sum_{j=1}^N A^{(2)}_{ij} Y_j + \beta^4 \sum_{j=1}^N A^{(4)}_{ij} Y_j = \omega^2 (\rho h a^4 / D) Y_i ; i=3, 4, \dots, (N-2) \quad (9)$$

次に、 ξ -軸に平行な2辺で導入される境界条件も、同様に、次のように表される。

(a) 固定辺 ($W=0, \partial W / \partial \eta=0$) は、次式で表される。

$$\eta=0 \text{ で、 } Y_1=0, \sum_{j=1}^N A^{(1)}_{1j} Y_j = 0 \text{ になり、 } \eta=1 \text{ で、 } Y_N=0, \sum_{j=1}^N A^{(1)}_{Nj} Y_j = 0 \text{ になる。}$$

(b) 単純支持辺 ($W=0, M \eta=0$) は、次式で与えられる。

$$\eta=0 \text{ で、 } Y_1=0, \{\beta^2 \sum_{j=1}^N A^{(2)}_{1j} - \nu (\pi)^2\} Y_2=0 \text{ になり、 } \eta=1 \text{ で、 } Y_N=0, \{\beta^2 \sum_{j=1}^N A^{(2)}_{Nj} - \nu (\pi)^2\} Y_{N-1}=0 \text{ になる。}$$

(c) 自由辺 ($M \eta=0, Q \eta=0$) は、次式で求められる。

$$\eta=0 \text{ で、 } \{\beta^2 \sum_{j=1}^N A^{(2)}_{1j} - \nu (\pi)^2\} Y_1=0, \{\beta^2 \sum_{j=1}^N A^{(3)}_{1j} + (\nu-2) \beta (\pi)^2 \sum_{j=1}^N A^{(1)}_{1j}\} Y_2=0 \text{ になり、}$$

$$\eta=1 \text{ で、 } \{\beta^2 \sum_{j=1}^N A^{(2)}_{Nj} - \nu (\pi)^2\} Y_N=0, \{\beta^2 \sum_{j=1}^N A^{(3)}_{Nj} + (\nu-2) \beta (\pi)^2 \sum_{j=1}^N A^{(1)}_{Nj}\} Y_{N-1}=0 \text{ になる。 (10. a, b, c)}$$

したがって、式(9)と与えられた境界条件式を行列表

示すれば、次式の線形代数方程式が得られる。

$$\begin{bmatrix} [Kbb] & [Kbd] \\ [Kdb] & [Kdd] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{Yb\} \\ \{Yd\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ n^* \{Yd\} \end{Bmatrix} \quad (11)$$

ただし、 $\{Yb\} = \{Y_1, Y_2, Y_N, Y_{N-1}\}$, $\{Yd\} = \{Y_3, Y_4, \dots, Y_{N-2}\}$,

$n^* = \omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$ は振動数パラメータである。

また、式(6)を変形すると、次の固有方程式が導ける。

$$[[Kdd] - [Kdb][Kbb]^{-1}[Kbd]] \{Yd\} = [\bar{K}] \{Yd\} = n^* [I] \{Yd\} \quad (12).$$

ここで、 $[I]$ は $(N-4) \times (N-4)$ の大きさの単位行列である。 $[\bar{K}]$ は、実非対称行列になるので、この行列を安定化基本変換によって上ヘッセンベルグ行列に移行し、ダブルQR法を適用して固有値計算を行い、また、逆反復法により固有ベクトルを求めている。

3. 数値計算例及び考察

DQMを用いた相対する2辺が単純支持された長方形薄板の振動解析を示す。Table 1には、他の2辺が固定された長方形板の振動数パラメータ、 $n^* = \omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$ の収束性に与える離散点の数、Nの影響が示してある。ここで、辺長比は1.0と1.5に仮定し、Nは7から15まで変化させている。また、比較のために、Leissaの厳密解⁹⁾も示してある。これより、離散点の数を増すと、一定値への収束性が示され、またその値は、厳密解と良く一致した結果が得られている。DQMの未知数の大きさは、 $N-4$ で与えられ、また直接的に数値積分公式を用いていないので、有限帯板法などと比較しても、速く計算できる。しかし、離散点の数を増大すると、DQMで用いる補間多項式の次数が $N-1$ になるので、桁落ちや丸め誤差が生じてくるので、数値計算上注意が必要である。Table 2は、他の2辺が任意の境界条件を持つ板の振動数パラメータの精度比較を示している。ただし、 $N=12$ を用いている。これより、いずれの場合にも、1%以内の精度で一致した結果が得られる。

4. あとがき 得られた結果をまとめると、次のようになる。1) Lagrange多項式を補関数に用いたDQMでは、従来のDQMと比較して、等間隔に離散点が設けられ、また境界条件の導入が容易である。2) 離散点を高めると、一様な収束状態が得られ、また比較的少ない未知数で、低次の振動数が精度よく求められる。3) しかしながら、高次の補間多項式を用いると、桁落ちや丸め誤差が生じてくる。

参考文献 1) Bellman, R.E. and Casti, J.: Differential quadrature and long-term integration. J. Math. Anal. Appl., 34, 235-238, 1971. 2) Bert, C.W. and Malik, M.: Differential quadrature method in computational mechanics: A review. AMR, 49, 1-28, 1996. 3) Shu, C.t. et. al.: Application of generalized differential quadrature to solve two-dimensional incompressible Navier-Stokes equations. Int. J. Num. Meth. Fluids, 15, 791-798, 1992. 4) Leissa, A.W.: JSV, 31, 1973.

Table 2. Frequency parameter, $n^* = \omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$ of square plates with arbitrary boundary conditions: $a/b=1.0$, $N=12$ and $\nu=0.3$

Boundary conditions	Modes					
	1st	2nd	3rd	4th	5th	6th
SS-CC	28.95	54.76	69.39	94.66	102.3	125.9
	*28.95	54.74	69.32	94.59	102.2	129.1
SS-CS	23.65	51.69	58.65	86.14	100.3	108.7
	*23.65	51.67	58.65	86.13	100.3	113.2
SS-SS	19.74	49.35	49.35	78.97	98.70	98.70
	*19.74	49.35	49.35	78.96	98.70	98.70
SS-CF	12.68	33.07	41.79	63.13	72.02	91.27
	*12.69	33.07	41.70	63.01	72.40	90.61
SS-SF	11.68	27.76	41.26	59.21	61.57	90.81
	*11.68	27.76	41.20	59.07	61.86	90.29
SS-FF	9.632	16.14	36.74	39.01	46.84	71.31
	*9.631	16.14	36.73	38.95	46.74	70.74

* is the exact value by Leissa⁹⁾