

I-A79 ライズを持つ長方形板の多自由度系としての非線形振動特性の解析

長崎大学大学院 学生会員○三堂 聡

長崎大学工学部 フェロー 高橋和雄

1. はじめに

薄板にライズを持たせると曲率構造となるため、剛性が高まり構造上有利である。しかし、飛び移り座屈を含めた不安定現象¹⁾が生じやすく、ライズの大きさが座屈強度に敏感に影響を及ぼすことが知られている。ライズによって生じる運動方程式内の2次の非線形項が座屈特性に重要な役割を果たし、動的荷重が作用する場合には、動座屈や振動の問題が生じてくる。変形に対して幾何学的非線形性を示すため動力学の特性を説明するためには、線形振動のみならず、非線形振動特性も明らかにしなければならない。板は連続体であるため、本研究では、ライズを持つ長方形版を多自由度系²⁾として取り扱う。解析の手順として、ライズを持つ長方形板の運動方程式を、Galerkin法を用いて多自由度系に近似し、さらに調和バランス法を用いて連立非線形方程式に変換し、Newton-Raphson法により解析する。数値解析において高次モードの非線形自由振動および1次モードの強制振動に及ぼす高次モードの影響を明らかにする。

2. 解析モデル

図1のような、初期形状 w_0 を持つ長方形板の振動によって起こるたわみを w とする。

3. 解法

ライズを持つ長方形板の運動方程式と適合条件式はMarguerre³⁾の式を用いる。板の境界条件は、曲げに対して全周辺単純支持とし、面内変位 u, v は固定とする。

運動方程式の解を、境界条件を考慮して多自由度系で式(1)のように仮定する。また、初期形状も境界条件を満足しなければならないため、式(2)のように仮定する。

$$w = d \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} T(t)_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \quad (1)$$

ここに、 $T(t)$: 未知の時間関数、 e_0 : ライズ比、 d : 板厚。

解析の手順として、Marguerreの式の適合条件式より、応力関数 F を式(1)、(2)を用いて解き、面内方向の境界条件の下に決定する。

運動方程式に、たわみの仮定および応力関数を代入してGalerkin法を適用する。本研究では、1次モードと1個の高次モードを選ぶ。この場合、次のような時間に関する運動方程式が得られる。

$$\ddot{T}_{11} + 2h\dot{T}_{11} + (1 + ae_0^2)T_{11} + be_0T_{11}^2 + ce_0T_{12}^2 + dT_{11}^3 + eT_{11}T_{12}^2 = fp \cos \omega \tau \quad (3)$$

$$\ddot{T}_{ij} + 2h'\dot{T}_{ij} + (a' + b'e_0^2)T_{ij} + c'e_0T_{11}T_{ij} + d'T_{ij}^3 + e'T_{11}T_{ij}^2 = \delta_{ij}f'p \cos \omega \tau \quad (4)$$

ここに、 $a, b, c, d, e, f, a', b', c', d', e', f'$: 係数、 δ_{ij} : Kroneckerのデルタ関数、 h, h' : 減衰定数、

$p = \frac{p_0 b^4}{Dd}$: 荷重強度、 $\omega = \Omega/\omega_{11}$: 無次元時間、 Ω : 励振円振動数、 $\tau = \omega_{11}t$: 無次元時間

T_{ij} : $(i, j) = (1, 2), (2, 1), (2, 2), \dots$

上式の解を次式のように仮定する。

キーワード: 長方形板, ライズ, 分岐, 非線形振動, 多自由度

〒852-8521 長崎市文教町1-14 長崎大学工学部社会開発工学科 TEL095-848-9639 FAX095-848-9639

$$T_{11} = c_0^{11} + c_1^{11} \cos \omega \tau + s_1^{11} \sin \omega \tau + c_{1/2}^{11} \cos \frac{\omega}{2} \tau + s_{1/2}^{11} \sin \frac{\omega}{2} \tau \quad (5)$$

$$T_{ij} = c_0^{ij} + c_1^{ij} \cos \omega \tau + s_1^{ij} \sin \omega \tau \quad (6)$$

ここに、 $c_0^{11}, c_1^{11}, s_1^{11}, c_{1/2}^{11}, s_{1/2}^{11}$: 1次モードの振幅成分、 $c_0^{ij}, c_1^{ij}, s_1^{ij}$: 高次モードの振幅成分。

上式(5)、(6)を、時間に関する非線形運動方程式(3)、(4)に代入して調和バランス法を適用すると、連立非線形代数方程式が得られる。これに、Newton-Raphson法を適用して解けば、解が得られる。

4. 解析結果

ポアソン比 $\nu = 0.3$ 、縦横比 $\mu = 1$ の正方形板を数値計算の対象とする。

図2は1次モード T_{11} 、図3は2次モード T_{12}, T_{21} および3次モード T_{22} および4次モード T_{33} のライズ比 $e_0 = 0.0, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0$ の非線形自由振動曲線を示している。縦軸は振幅の変動成分 $c_1^{11}, c_1^{12}, c_1^{21}, c_1^{22}$ 、横軸は無次元振動数 ω をとっている。図2の1次モードの非線形自由振動では、ライズ比 $e_0 = 0$ の場合、振動数は振幅 c_1^{11} の増大とともに単調に増加するのみであるが、ライズ比が板厚程度になるとライズの影響が効いてくる。

振幅が小さい場合は、軟化バネの特性を示し、振幅がライズ比よりも大きくなると硬化バネの特性を示す。図3の2次、3次および4次モードの非線形自由振動では、軟化バネの特性は現れず、硬化バネの特徴のみが現れている。1次モードではライズの影響が効いているが、2次、3次モードでは、ライズの影響がほとんど効いていない。運動方程式内の2次の非線形項が入っていないためと考えられる。

図4はライズ比 $e_0 = -1$ 、荷重強度 $p = 300$ 、減衰定数 $h = 0$ の1次モードと4次モードの強制振動を示している。主共振 c_1^{11} 、 $1/2$ 分数調波共振 $c_{1/2}^{11}, s_{1/2}^{11}$ および4次モードの応答振幅 c_1^{33} が現れている。1次モードの振幅成分と4次モードの振幅成分は別々に現われ、連成の影響がないことが分かる。

5. まとめ

1次モードの非線形自由振動は、ライズの大きさによって軟化・硬化バネの両特性を持つが、2次、3次および4次モードの非線形自由振動では、軟化バネの特性は現れず、硬化バネの特性のみが現れる。

2自由度系の対称振動の非線形強制振動は、1次モードの振幅成分と4次モードの振幅成分は、別々に現われ、連成の影響がない。

参考文献

- (1) 八巻：弾性体の非線形振動，日本機械学会 第373回講習会「非線形振動の理論と実践」教材，pp.31~50，1973。
- (2) 高橋・河原・山辺：はりおよび薄板の非線形振動の Galerkin 法による解析の収束性および安定について，土木学会論文報告集，第293，pp.9~22，1980。
- (3) Marguerre, K. Über die Beanspruchung von Plattenträgern, Stahlbau, 21, pp.129~132, 1952。

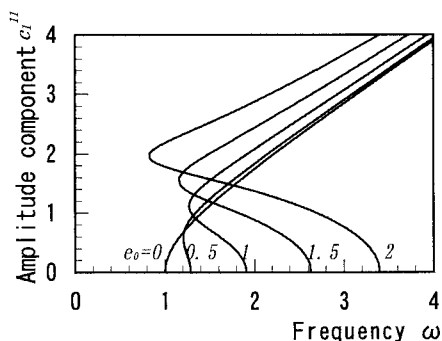


図2 1次モードの非線形自由振動曲線

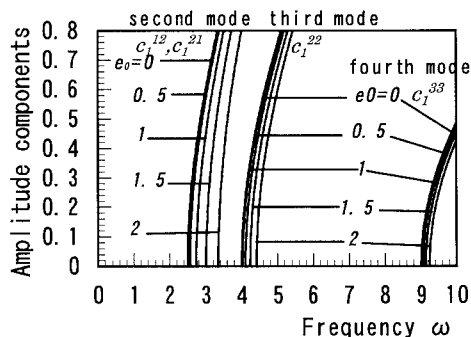


図3 2次、3次、4次モードの非線形自由振動曲線

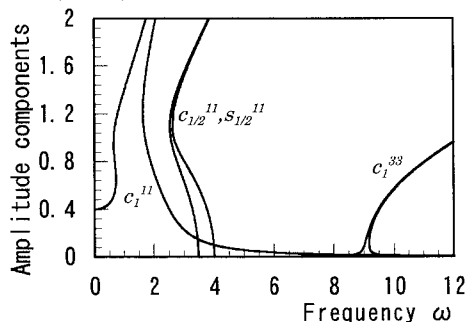


図4 応答曲線 ($e_0 = -1, h = 0$)