

I-A71 Lagrange 多項式を用いた薄板のエレメントフリー解析

群馬工業高等専門学校 正会員 末武義崇

1. まえがき

最近、有限要素法のような要素分割を必要としない新しい数値解析手法として、“エレメントフリー法”が注目されている。エレメントフリー法の定式化には幾つかの流れがあるが、Belytshko ら[1][2]によって考案された“Element Free Galerkin Method (EFGM)”が最も著名な定式化である。ところが、EFGMの場合、移動最小二乗法に従って離散化を行うため、近似的にしか基本境界条件を満足し得ないことが問題点として残っている。これに対し、井浦ら[3]は、移動最小二乗法を用いつつも、変位関数の不定係数を境界上の節点に付随する物理量に変換することで、より自然な形で基本境界条件を導入することに成功している。

本研究は、移動最小二乗法の手続きに従うのではなく、Lagrange の多項式を変位関数として用いることで、より単純かつ直接的なエレメントフリー法[4]の構築を計った。その結果、境界上の節点値を直接的に未知量として導入できるため、基本境界条件の処理が極めて容易になった。具体例として、薄板の大たわみ問題を取り上げ、サポート領域の大きさを変化させて解析を実施し、数値解の変動について定量的な検討を行った。

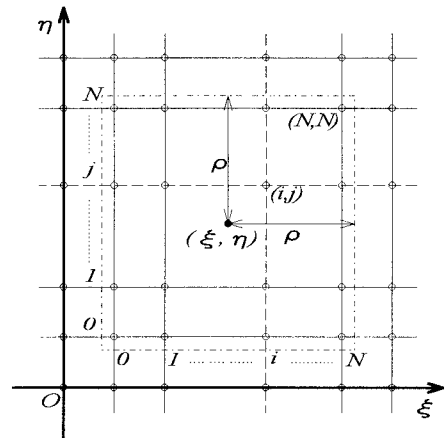
2. Lagrange 多項式を用いた離散化

図1に示すような、評価点 (ξ, η) を中心とする、1辺の長さが 2ρ の正方形をサポート領域と考える。評価点近傍の無次元化たわみ $\omega(\xi, \eta)$ は、サポート領域内部の $(N+1)^2$ 個の節点値 $\omega_{ij}(i, j=0 \sim N)$ を用いて、次式で表現される。

$$\omega(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \omega_{ij} \varphi_i(\xi) \psi_j(\eta) \quad (1)$$

ここに、 $\varphi_i(\xi)$ および $\psi_j(\eta)$ はLagrange基底であり、例として $\varphi_i(\xi)$ の定義式を示すと次式の通りである。

$$\varphi_i(\xi) = \prod_{m=0}^N X_{m,i}; X_{m,i} = \begin{cases} 1 & (m=i) \\ (\xi - \xi_m)/(\xi_i - \xi_m) & (m \neq i) \end{cases} \quad (2)$$



式(1)で表されるLagrangeの多項式を用いれば、評価点 (ξ, η) におけるたわみおよびその偏導関数は、次式のようにマトリックス表示することができる。

$$\partial_{\xi}^i \partial_{\eta}^j \omega(\xi, \eta) = \mathbf{B}_n^T(\xi, \eta) \cdot \boldsymbol{\omega} ; n = \sum_{p=1}^{i+j} p + j \quad (3)$$

ここに、 $\mathbf{B}_n$ はLagrange基底およびその微分からなる係数ベクトル、 $\boldsymbol{\omega}$ は節点値ベクトルである。式(3)によって、任意の評価点における関数値および微分値を、サポート領域内の節点値で表現することができる。

変分原理に基づく定式化において、対象とする領域内の積分を数値積分によって評価すれば、各積分点ごとに式(3)を用いることで汎関数を離散化することができる。また、結果として求めた節点値を式(3)に代入すれば、任意の評価点における数値解を計算することができる。しかも、ここで提示した離散化過程においては、固定した“要素”という枠内で未知量を補間する有限要素法と異なり、評価点に付随して設定された“サポート領域”を通じて節点値と評価点の値とが直接的に結びつけられ、要素分割は不要となる。

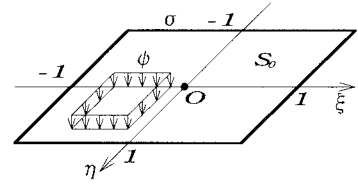
キーワード：エレメントフリー法、Lagrange 多項式、薄板、有限変位、非線形解析

〒371-8530 前橋市鳥羽町580 群馬高専 環境都市工学科 TEL: 027-254-9189 FAX: 027-254-9183

3. 薄板の大たわみ問題

図2に示したような、周辺単純支持平板の大たわみ問題に対する無次元化汎関数は、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \Pi = & \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \{ \Omega(\alpha, \beta, \omega) - \psi \omega \} d\xi d\eta + C_4 \frac{\zeta^2}{2} \int_{\partial\Omega} \{ (\frac{\partial \omega}{\partial \xi})^2 + (\frac{\partial \omega}{\partial \eta})^2 \} d\sigma \\ & + C_1 \frac{6}{\zeta^2} \int_{\partial\Omega} \{ \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} + \frac{\zeta^2}{2} (\frac{\partial \omega}{\partial \xi})^2 \}^2 d\sigma + C_2 \frac{6}{\zeta^2} \int_{\partial\Omega} \{ \frac{\partial \beta}{\partial \eta} + \frac{\zeta^2}{2\gamma^2} (\frac{\partial \omega}{\partial \eta})^2 \}^2 d\sigma \quad (4) \\ & + C_3 \frac{6}{\zeta^2} \int_{\partial\Omega} (\frac{\partial \alpha}{\partial \eta} + \gamma^2 \frac{\partial \beta}{\partial \xi} + \zeta^2 \frac{\partial \omega}{\partial \xi} \frac{\partial \omega}{\partial \eta})^2 d\sigma \end{aligned}$$



ここに、 α および β はそれぞれ ξ および η 方向の無次元化面内変位、 ω は無次元化たわみ、 ψ は無次元化荷重、 γ は縦横比、 ζ は幅厚比であり、 $C_i (i=1\sim 4)$ はペナルティー係数を表している。周辺単純支持の境界条件は、直接の未知量となる境界上節点のたわみをゼロとしたほか、膜力および曲げモーメントをゼロとするために、ペナルティー法を用いて評価した。また、 Ω は無次元化されたひずみエネルギー関数であり、薄板の大たわみ問題の場合、Poisson 比を ν として次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \Omega(\alpha, \beta, \omega) = & \frac{6}{\zeta^2} \{ \{ \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} + \frac{\zeta^2}{2} (\frac{\partial \omega}{\partial \xi})^2 \}^2 + \{ \frac{\partial \beta}{\partial \eta} + \frac{\zeta^2}{2\gamma^2} (\frac{\partial \omega}{\partial \eta})^2 \}^2 + 2\nu \{ \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} + \frac{\zeta^2}{2} (\frac{\partial \omega}{\partial \xi})^2 \} \{ \frac{\partial \beta}{\partial \eta} + \frac{\zeta^2}{2\gamma^2} (\frac{\partial \omega}{\partial \eta})^2 \} \\ & + \frac{1-\nu}{2\gamma^2} (\frac{\partial \alpha}{\partial \eta} + \gamma^2 \frac{\partial \beta}{\partial \xi} + \zeta^2 \frac{\partial \omega}{\partial \xi} \frac{\partial \omega}{\partial \eta})^2 \} + \frac{\zeta^2}{2} (\frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2})^2 + \frac{1-\nu}{\gamma^2 \zeta^2} \{ (\frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi \partial \eta})^2 - \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} \} \end{aligned} \quad (5)$$

無次元化たわみ ω と同様に、面内の無次元化変位 α および β についても式 (3) を用いて表せば、式 (4) で与えられる無次元化汎関数を離散化することができ、停留原理を適用することで、離散化された非線形基礎方程式を導くことができる。実際の数値計算の際には、Newton 法と増分法とを組み合わせた収束計算アルゴリズムに従って、誘導された非線形基礎方程式を解くこととした。

4. 数値計算例

具体例として、中央点に集中荷重 Γ を受けた場合の解析結果を示す。数値計算にあたっては、図1に示したサポート領域の大きさ ρ を種々変化させて解析を行った。その他のパラメータについては全て同一であり、総節点数を $11 \times 11 = 121$ 、縦横比 1、幅厚比 0.01、Poisson 比 $\nu = 0.3$ 、ペナルティー係数を全て 10^4 とした。数値積分については、領域全体を $5 \times 5 = 25$ の小領域に分け、5 次の Gauss 積分公式を適用した。非線形計算については、荷重増分を 0.05、総ステップ数 20 としたほか、不平衡力が増分荷重の 0.1% 未満になるまで収束計算を実施した。

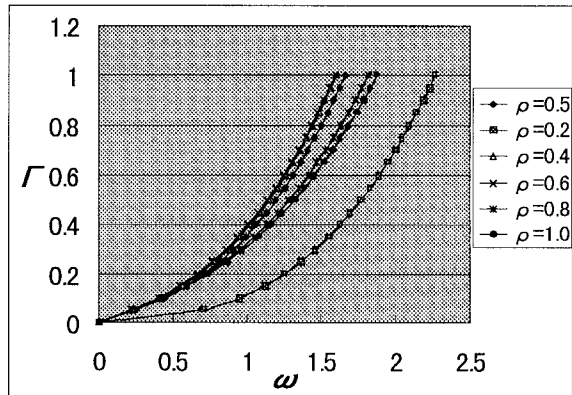


図3. たわみ－荷重関係

解析結果を図3に示す。図は、中央点における荷重－たわみ ($\Gamma - \omega$) 関係を示したものである。図から明らかなように、サポートパラメータ $\rho = 0.2$ の場合、荷重レベルの低い段階から他の5つの解析結果と大きく異なる数値解が得られている。線形解析では、サポートパラメータ $\rho = 0.2$ のモデルであっても、誤差 3% 未満の良好な近似解が得られていることを考慮すると、収束計算を伴う非線形解析の場合には、適切なサポートパラメータの範囲が、さらに限定されたものになることが予想される。

参考文献

[1] T. Belytsko et al., Int. J. Numer. Methods. Engrg., 37 (1994). [2] Y. Lu et al., Compt. Methods Appl. Mech. Engrg., 133 (1994). [3] 井浦 他, 構造工学論文集, 47A (1997). [4] Y. Suetake, Finite Element Applications, PVP-Vol.370, ASME (1998).