I－A69　弾塑性マルチスケール解析の数値解

東北大学　学生員　○松井　和己
東北大学　正会員　寺田　賢二郎

1. はじめに

均質化理論は微細な構造形態の力学応答を反映して，非均質な構造の挙動を評価する数学的手法として知られている．均質化法の有する数理構造は，微視(ミクロ)構造の周期性の仮定などの制約はあるものの，局所的な領域での力学挙動と巨視的な応答とを対応させることを可能にしている．しかしながら，多くの非均質材料が呈する非線形挙動に関しては，理論的にも曖昧な点が多く，特に，マクロ構造の挙動がミクロ構造の有限要素解析に依存しているため，ミクロ構造の非線形挙動が周期性を失うことの影響は，マルチスケール非線形解析の信頼性に関わる重要な問題である．

ここでは非線形力学挙動を示す材料として弾塑性体を考え，これらからなる非均質体に対して，均質化法を適用したマルチスケール解析を行う際に指摘されている問題点についての検討を行う．つまり，周期的な変形を仮定したミクロ構造解析の結果として得られるマクロ構造物の挙動がどの程度の信頼性を有するのか，また周期性が失われることについての影響について数値的に考察する．

2. 均質化法に基づくマルチスケール解析

一般的な均質化理論 [1]に従って，マクロスケール $\boldsymbol{x}$ と，非均質性を測る尺度であるミクロスケール $\boldsymbol{y}$ を導入する．これらのスケールはミクロ構造の大きさを表す ε によって，$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}/\varepsilon$ と関連づけられ，$\varepsilon\to 0$ の極限としてミクロ領域におけるつり合い式

$$\int_Y \nabla_y\boldsymbol{\eta}^1:\boldsymbol{\sigma}^0_{n+1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\mathrm{d}y=0\quad\forall\boldsymbol{\eta}^1\in\mathcal{V}_{\mathrm{per}}\quad,\quad\int_Y\gamma^0:\left(\frac{\partial W(\boldsymbol{y},\boldsymbol{\varepsilon}^0)}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}^0}-\boldsymbol{\sigma}^0_{n+1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\right)\mathrm{d}y=0\quad\forall\gamma^0\in\mathcal{S}_{\mathrm{per}}\quad\cdots\cdots(1)$$

$$\int_Y\boldsymbol{\tau}^0:\left(\mathrm{sym}(\nabla_x\boldsymbol{u}^0_{n+1}(\boldsymbol{x})+\nabla_y\boldsymbol{u}^1_{n+1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))-\boldsymbol{\varepsilon}^0_{n+1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\right)\mathrm{d}y=0\quad\forall\boldsymbol{\tau}^0\in\mathcal{E}_{\mathrm{per}}\quad\cdots\cdots(2)$$

となる．ここで $\boldsymbol{\sigma}^0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ はミクロ応力，$\boldsymbol{\varepsilon}^0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ はミクロひずみ，γ^0 は塑性 consistency パラメータである．また,$\boldsymbol{u}^1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ は Y-periodic な変位関数で，これとマクロの変位 $\boldsymbol{u}^0(\boldsymbol{x})$ を用いてユニットセル内の変位は次のように表される．

$$\boldsymbol{u}_{n+1}=\mathrm{sym}(\boldsymbol{u}^0_{n+1})\cdot\boldsymbol{y}+\boldsymbol{u}^1_{n+1}\quad\cdots\cdots(3)$$

構成則として関連流れ則および等方硬化則を考えると，時刻 t_n における塑性応答が既知であるとして，

$$\varepsilon^{\mathrm{p}0}_{n+1}=\varepsilon^{\mathrm{p}0}_n+\Delta\gamma^0\frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma}^0_{n+1},q^0_{n+1})}{\partial\boldsymbol{\sigma}^0}\quad,\quad q^0_{n+1}=q^0_n-\Delta\gamma^0\boldsymbol{b}(\boldsymbol{y})\frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma}^0_{n+1},q^0_{n+1})}{\partial q^0}\quad\cdots\cdots(4)$$

$$f(\boldsymbol{\sigma}^0_{n+1},q^0_{n+1})\le 0\ ,\ \Delta\gamma^0\ge 0\ ,\ \Delta\gamma^0 f(\boldsymbol{\sigma}^0_{n+1},q^0_{n+1})=0\quad\cdots\cdots(5)$$

を満たすような時刻 t_{n+1} における塑性応答を表す内部変数も求める必要がある [2]．ここで q^0 は，塑性硬化に関する内部変数,$f(\boldsymbol{\sigma},q)$ は降伏関数，$\boldsymbol{b}(\boldsymbol{y})$ は単位体積に働く物体力である．

またマクロ領域のつり合い式は

$$\int_\Omega\nabla_x\boldsymbol{\eta}^0:\boldsymbol{\Sigma}_{n+1}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x=\int_\Omega\rho^H\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\eta}^0\mathrm{d}x+\int_{\Gamma_\sigma}\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{\eta}^0\mathrm{d}s\qquad\forall\boldsymbol{\eta}^0\in\mathcal{V}\quad\cdots\cdots(6)$$

$$\int_\Omega\boldsymbol{\Gamma}:\left(\left[\frac{1}{|Y|}\int_Y\boldsymbol{\sigma}^0_{n+1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\mathrm{d}y\right]-\boldsymbol{\Sigma}_{n+1}(\boldsymbol{x})\right)\mathrm{d}x=0\quad\forall\boldsymbol{\Gamma}\in\mathcal{S}\quad\cdots\cdots(7)$$

$$\int_\Omega\boldsymbol{T}\left(\left[\frac{1}{|Y|}\int_Y\mathrm{sym}(\nabla_x\boldsymbol{u}^0_{n+1}(\boldsymbol{x}))\mathrm{d}y\right]-\boldsymbol{E}_{n+1}(\boldsymbol{x})\right)\mathrm{d}x=0\quad\forall\boldsymbol{T}\in\mathcal{S}\quad\cdots\cdots(8)$$

と得られる．ここで,$\Sigma(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{x})$ はそれぞれマクロ応力，マクロひずみである．また,T はマクロ構造に作用する表面力,ρ^H はミクロ構造から得られる平均密度である．ミクロ問題は，マクロ構造の有限要素モデルの各 Gauss 点における状態変数の値を用いた周期変形場のつり合い問題であり，この2つの境界値問題を同時に満足するような解を数値解析によって求める．

〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉06 東北大学大学院工学研究科 土木工学専攻, Phone: 022-217-7420,FAX: 022-217-7418
Key Words: Multiscale Analysis, Homogenization Method, Nonlinear Problems, Elastplasticity

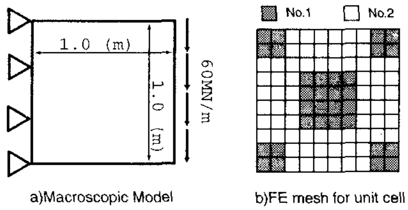

Fig-1 Numerical models in FEA

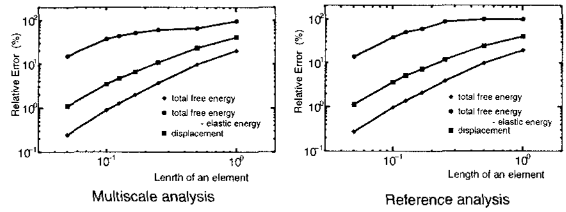

Fig-2 Mesh dependency measured by relative errors

3. 数値解析例

有限要素法により弾塑性体に対するマルチスケール解析をおこない，その数値解の妥当性について検討する．まずマクロモデルが持つ離散化の誤差を見るために，均質体と見なした構造に対してメッシュサイズを変化させた弾塑性解析を行う．同様にマクロモデルのメッシュサイズを変化させたマルチスケール解析を行い，非均質体の弾塑性応答について，メッシュサイズへの依存性を見る．次に，実際の構造としてユニットセルの数を限定した解析を行い，均質化法に基づく数値解と比較しメッシュの細分化によってミクロ構造の周期性が成立する領域が小さくなることの影響を見る．

今回の解析では2次元平面ひずみを仮定し，用いたマクロモデルとユニットセルモデルを**Fig-1**に示す．また，構成材料はすべて等方性を仮定し，材料2のみが弾塑性挙動を示すものとした．ここでReference Materialとして，ユニットセルに対する1軸引張弾塑性解析の結果から推定したものを，均質体と見なした弾塑性解析において用いた．各材料定数は次に示すとおりである．また，すべてのモデルは正方形要素とした．

- 材料1: ヤング率 =379.2(GPa)，ポアソン比 =0.21
- 材料2: ヤング率 =68.9(GPa)，ポアソン比 =0.30，降伏応力 =24.0(MPa)，硬化係数 =4.0(GPa)
- Reference: ヤング率 =102.8(GPa)，ポアソン比 =0.30，降伏応力 =23.5(MPa)，硬化係数 =25.0(GPa)

(1) マクロ応答のメッシュ依存

数種類のメッシュサイズからなるマクロモデルを用意し，それぞれに対してマルチスケール解析を行った．また均質体と見なした構造に対しても，同様のマクロモデルを用いて，通常の弾塑性解析を行った．それぞれの解析から得られた数種のノルムの最小のメッシュサイズを基準とした相対誤差と，メッシュサイズの関係を**Fig-2**に示す．この2つの解析を通して，各ノルムの相対誤差が同じような変動を示している．このことから異なるメッシュサイズを持つモデル間の非線形応答の違いは，マクロの構造解析での離散化誤差が支配的であるといえる．

(2) 実際にセルを有する構造の解析との比較

ここでは，実際にセルを並べたモデルに対する弾塑性解析と，マルチスケールによる解析の解を比較する．**Fig-3**にFree Energyとセル個数の関係，およびマルチスケール解析から得られたものを示す．このグラフからわかるように，弾塑性均質化法による数値解が非常によい近似を与えていると言える．実際の構造のセル数を増やしたときの収束先に均質化法による解がなく均質化法の理論と整合していないが，この現象は線形解析においても見られるので，非線形マルチスケール解析固有のものと結論づけることはできない．先ほどの結果から推測すると，マクロモデルの離散化誤差を軽減することで，より理論的な解に近づけることができるだろう．

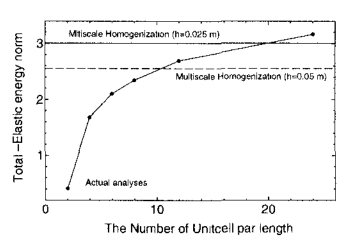

Fig-3 Comparison between actual analyses and multiscale homogenization

4. まとめ

本来マクロ構造の物性を与えるミクロ解析は，マクロ挙動に対して局所的な構成関係を表すものであり，ユニットセルの幾何学的な周期性の仮定がマクロ構造の各点で成り立っている必要はない．メッシュを細かくすることで周期性の仮定が成り立たなくなり，マルチスケール解析の数値解は誤差を含むことになるが，その誤差は有限要素法の離散化によるものと比較して非常に小さく，通常の解析において問題になることは少ない．したがって数学的均質化手法は数理モデルとして信頼できる非線形マルチスケール解析法を提供していると言える．

参考文献

1) 寺田賢二郎，菊池昇，非線形マルチスケール構造解析の一般化アルゴリズム，計算工学講演会論文集，Vol.4.1999.
2) Simo,J.C. and Hughes, T.J.R., *Computational Inelasticity*,Springer-Verlag, New York, 1998