

I-A68

薄肉構造に適用可能な8節点ソリッド要素

徳山工業高等専門学校 正会員 岩崎英治
長岡技術科学大学 正会員 林 正

1. まえがき

板のような薄肉部材にソリッド要素を用いると、せん断ロッキングが生じることや平面応力状態を表現できないことにより、板・シェル要素による解と同程度の精度の解を得る場合でさえ、厚さ方向と板面内の多くの要素分割が必要になる。そこで、せん断ロッキングを緩和し、平面応力状態を表現できるようにし、厚さ方向の要素分割を行わなくても、板・シェル要素と同程度の解が得られ、厚さ方向にも要素分割するとソリッド要素本来の厚さ方向への応力変化を計算できるようなソリッド要素を提案する。

2. せん断ロッキングの緩和

8節点アイソパラメトリックソリッド要素を考える。この要素の自由度は24個あり、このうち剛体モードを表す6個の自由度を除くと、表現可能な変形モードは18個である。ソリッド要素のひずみを正規座標 ξ_i で展開して、次のように表す。

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^0 + \xi_1 \varepsilon_{ij}^1 + \xi_2 \varepsilon_{ij}^2 + \xi_3 \varepsilon_{ij}^3 + \xi_1 \xi_2 \varepsilon_{ij}^{12} + \xi_2 \xi_3 \varepsilon_{ij}^{23} + \xi_3 \xi_1 \varepsilon_{ij}^{31} + \dots$$

定ひずみ項 ε_{ij}^0 の6成分は、上記の18個の変形モードで独立に表現されるが、定ひずみ以外の多くの項は、残りの12個の変形モードで表されることになるので、ひずみの項の間に従属関係が生じている。

いま、 ξ_3 方向に薄い部材にソリッド要素を用いた場合を考えると、せん断ひずみ $\varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}$ が他のひずみ成分に比べて小さくなり、 $\varepsilon_{13} \div \varepsilon_{23} \div 0$ と見なせるようになる。この関係が要素内の任意の点で成立することになるので、ひずみを正規座標で展開した各係数がゼロに近くなり、幾つかの変形モードがゼロや従属の拘束を受けるようになる。このとき、拘束される変形モードは $\varepsilon_{11}^3, \varepsilon_{22}^3$ や ε_{12}^3 などの薄板の面外変形を表す項にも含まれているので、面外変形が拘束されるせん断ロッキングを生じる。

そこで、 ε_{13} と ε_{23} に含まれる項から、 $\varepsilon_{11}^3, \varepsilon_{22}^3$ や ε_{12}^3 に影響を与える変形モードを削除することによりせん断ロッキングを緩和する。

同様に、 ξ_3 方向に薄く、 ξ_1 または ξ_2 方向に細長い薄板にソリッド要素を適用した場合には、せん断ひずみ ε_{12} もゼロに近くなる。このとき、 ε_{11} や ε_{22} に

含まれる項に影響を与える項も ε_{12} から削除すると板の面内変形に関するせん断ロッキングも緩和できる。

3. 応力ひずみ関係式の修正

薄い部材では、厚さ方向の応力は他の応力成分に比べて小さく、平面応力状態とみなすことができる。応力もひずみの場合と同様に正規座標で展開して、変形モードを調べると、要素内一定の応力状態は独立な変形モードで表されていることを確認できるが、応力の他の項には、ひずみの場合と同様、従属関係が生じている。このため、板厚が薄く、板厚方向の応力成分が小さくなると、他の応力成分にも影響を与えることになる。そこで、要素内一定の応力は、定ひずみに相当するひずみから、3次元弾性体の応力ひずみ関係式を用いて求め、他の応力は、平面応力状態を表す応力ひずみ関係式から求めることにする。

同様に、 ξ_3 方向に薄く、 ξ_1 または ξ_2 方向に細長い薄板にソリッド要素を適用する場合には、単軸応力状態とみなすことができるが、この応力状態を正確に表現できるように応力ひずみ関係式を修正する。

このように、要素内一定の応力に相当する応力ひずみ関係式には、3次元弾性体の関係式を用い、残りの成分は平面応力状態や単軸応力状態の応力ひずみ関係式を用いると、厚さ方向や断面内での要素分割を行わなくても、板・シェル理論やはり理論の解が得られ、これらの方向の要素分割を細かくするとソリッド要素本来の解が得られるようになる。

4. 数値計算例

数値計算により本文に示した要素の精度を示す。

前述のように、ひずみの一部の項の削除と応力ひずみ関係式を修正して、板のような薄い部材に適用できるソリッド要素をPlate要素、薄く細長い部材に適用できるソリッド要素をSlender要素と表す。これらは、歪んだ要素形状でも、せん断ロッキングを緩和できるようにひずみ式の項を削除しているため、二つのゼロエネルギーモードを含んでいるが、通常の境界条件では、このゼロエネルギーモードによる不都合は生じないことを確認している¹⁾。ゼロエネルギーモードを含まないRegular要素との比較も行う。ま

表-1 等分布荷重の作用した4辺単純支持正方形板のたわみ

要素数 ¹	$\nu = 0.300$								$\nu = 0.499$							
	Full	Select	Koh	Koh-v	Liu	Liu-v	Plate	Slender	Full	Select	Koh	Koh-v	Liu	Liu-v	Plate	Slender
2×2×1	0.000	1.117	0.829	2.175	0.805	2.114	0.977	0.989	0.000	0.008	0.008	3.038	0.008	2.950	0.980	0.994
4×4×1	0.000	1.142	0.819	2.151	0.814	2.137	0.995	0.998	0.001	0.008	0.008	3.004	0.008	2.987	0.996	0.999
8×8×1	0.002	1.147	0.817	2.145	0.816	2.141	0.999	0.999	0.002	0.008	0.008	3.000	0.008	2.993	0.999	1.000
2×2×2	0.000	1.012	0.961	1.171	0.930	1.134	0.977	0.989	0.000	0.029	0.032	1.218	0.029	1.148	0.981	0.994
4×4×2	0.000	1.029	0.950	1.158	0.943	1.149	0.995	0.998	0.001	0.031	0.031	1.202	0.031	1.188	0.996	1.000
8×8×2	0.002	1.033	0.948	1.155	0.946	1.153	0.999	0.999	0.002	0.031	0.031	1.200	0.031	1.198	0.999	0.999
2×2×4	0.000	0.989	1.001	1.050	0.968	1.016	0.977	0.989	0.000	0.083	0.116	1.059	0.082	0.999	0.983	0.997
4×4×4	0.000	1.004	0.990	1.038	0.982	1.030	0.995	0.998	0.001	0.106	0.114	1.040	0.106	1.030	0.995	0.998
8×8×4	0.002	1.007	0.987	1.035	0.985	1.033	0.999	0.999	0.002	0.112	0.114	1.037	0.112	1.038	1.001	0.999

¹ ($n \times n \times m$): n は板面内の2方向の分割数, m は厚さ方向の分割数

表-2 片持ち梁の自由端のたわみ

要素数 ²	鉛直荷重								水平荷重							
	Full	Select	Koh	Koh-v	Liu	Liu-v	Plate	Slender	Full	Select	Koh	Koh-v	Liu	Liu-v	Plate	Slender
5×1×1	0.000				0.871	2.453	0.975	0.975	0.007				0.871	2.453	0.007	0.990
10×1×1	0.000				0.892	2.532	0.990	0.990	0.025				0.892	2.531	0.025	0.998
20×1×1	0.001				0.902	2.566	0.995	0.996	0.093				0.902	2.567	0.093	0.999
5×2×1	0.000	0.871	0.901	2.574	0.871	2.454	0.975	0.975	0.007	0.920	1.320	1.320	0.920	1.063	0.007	0.978
10×2×1	0.000	0.892	0.908	2.594	0.892	2.530	0.990	0.990	0.025	0.948	1.330	1.330	0.948	1.079	0.025	0.991
20×2×1	0.001	0.901	0.910	2.599	0.901	2.565	0.995	0.996	0.094	0.960	1.332	1.332	0.960	1.086	0.094	0.996
5×1×2	0.000	0.920			0.920	1.063	0.975	0.976	0.007	0.871			0.871	2.453	0.007	0.990
10×1×2	0.000	0.947			0.947	1.080	0.990	0.990	0.025	0.892			0.892	2.531	0.025	0.998
20×1×2	0.001	0.960			0.961	1.085	0.995	0.996	0.093	0.902			0.902	2.567	0.093	0.999

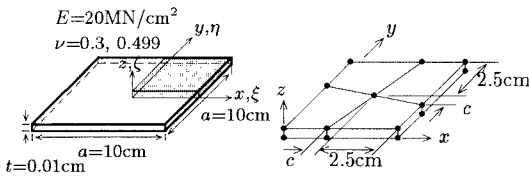
² ($l \times n \times m$): l は長手 (x) 方向, n は幅 (y) 方向, m は厚さ (z) 方向の分割数

図-1 4辺単純支持正方形板 図-2 歪んだ要素分割

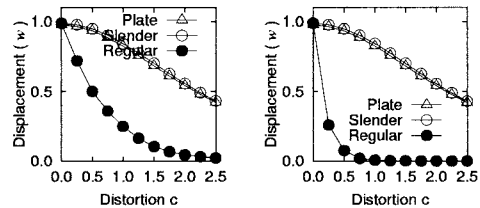
(a) $t/a=0.01$ (b) $t/a=0.001$

図-3 歪んだ要素分割でのたわみ

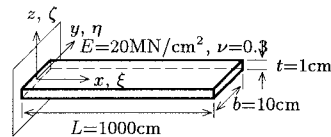


図-4 片持ち梁

た, 既往の要素として, 剛性行列を完全積分により求めた Full 要素, せん断ひずみに関する項だけを低減積分により求めた Select 要素, Koh ら²⁾, Liu ら³⁾により開発された Koh 要素, Liu 要素. これらの要素からポアソン比が 1/2 付近で生じる体積ロッキングも緩和した Koh-v 要素, Liu-v 要素との比較も行う.

表-1 は, 図-1 のような四辺単純支持正方形板に等分布荷重が作用したときの解析解で正規化した板中央のたわみを示している. また, 対称性を考慮して $x > 0, y > 0$ の領域だけを要素分割している. 図-3 は, 図-2 のように歪んだ要素分割で, 歪み具合を変化させたときの Plate 要素, Slender 要素と Regular 要素の精度を示している. 表-2 は, 図-4 のような片持ち梁の自由端に鉛直荷重と水平荷重を作用させたときの解析解で正規化した自由端のたわみを表している. なお, 表中の空欄は剛性行列が特異になり, 解が得られなかったことを表している.

これらの計算結果より, Plate 要素や Slender 要素は厚さ方向の要素分割を行わなくても精度の良い解が得られ, Slender 要素は片持ち梁のような細長い部材で, 断面内の要素分割を行わなくても精度の良い解が得られていることが分かる. すなわち, はり要素

や板・シェル要素と同じような要素分割で, はり理論や板・シェル理論の解が得られることを示している. また, ゼロエネルギーモードを含まない Regular 要素は要素が歪んだ場合には, 薄板ほど精度が悪化し, せん断ロッキングを緩和できていないが, Plate 要素と Slender 要素は板厚に関係ない結果が得られているので, 要素が歪んだ場合のせん断ロッキングを緩和できていることが分かる.

参考文献

- 1) 岩崎英治・林 正: 薄肉構造に適用可能な 8 節点ソリッド要素の開発, 土木学会論文集 (投稿中).
- 2) B.C.Koh and N.Kikuchi: New improved hourglass control for bilinear and trilinear elements in anisotropic linear elasticity, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, **65**, pp.1-46, 1987.
- 3) W.K.Liu, Y.-K.Hu and T.Belytschko: Multiple quadrature underintegrated finite elements, *Int. j. numer. methods eng.*, Vol.37, pp.3263-3289, 1994.