

I-A67 相似形メッシュを用いたはり問題の解析

○熊本工業大学 正 員 片山拓朗
八代高専 内山義博
熊本工業大学 正 員 平井一男

1. はじめに

有限要素法解析で相似形メッシュで分割された系において、任意の要素からなるサブパートと、残りの各パートが相似関係にあるならば、全体の剛性マトリックスはサブパートと相似比の累乗で表される。

本研究では、節点消去の順番に配慮すれば全体の剛性マトリックスを扱うことなくサブパートのみで縮合でき、しかも直接行うよりもはるかに少ない回数で消去・縮合が行えることを示し、具体的な数値計算を通して手法の適用範囲を明確にする。

2. 理論

2. 1 相似メッシュ

一様な厚さ及び材質の薄い台形板とか円板については、相似形メッシュに分割することは可能であり、平面問題であれば剛性マトリックスは同じ要素が並ぶ。例えば図-1でA部とB部が相似であれば、A部とB部の剛性マトリックスは全く同じであり、A部(サブパート)の剛性マトリックス(サブマトリックス K_s と呼ぶ)を2つ重ね合わせれば全体の剛性マトリックスとなる。このとき相似形の条件としては、 $b_1/b_0 = b_2/b_1 = \text{一定}$ となるように分割すればよい。すなわち、相似メッシュで分割できれば、分割数が増加してもサブパートの K_s さえ求めておけば全体の剛性マトリックスは K_s の重ね合わせで簡単に求められる。

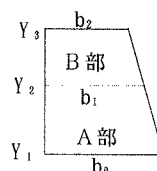


図-1

2. 2 マトリックスの消去・縮合

相似メッシュで横 m 分割、縦8分割された図-2に示す台形板の平面応力問題を例とする。縦8パートは相似であるから各パートはサブパートと同じ剛性マトリックスである。今、中間節点を全て消去して、上下端すなわち Y_1 、 Y_9 行に縮合することを考える。このとき、次のような

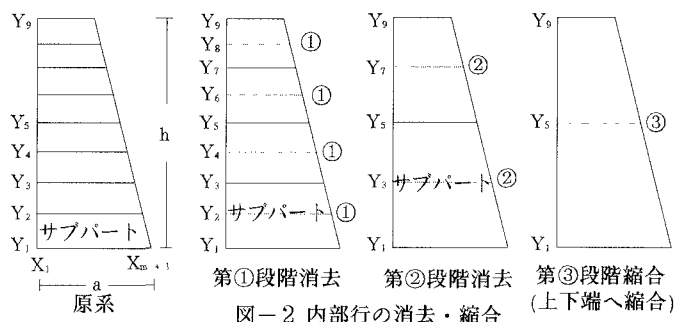


図-2 内部行の消去・縮合

手順で消去を行う。まず偶数行、つまり Y_2 行から一行おきに消去していく(図-2①部)。こうすると縮合された奇数行 Y_1 、 Y_3 、 $\dots$ 、 Y_9 は上下端を除いて各縦列毎に同じ値が並ぶ。このとき第①段階消去・縮合演算において4箇所の①部は、全く同一であるから最下層のみ1回の演算を行えばよい。縮合された Y_1 と Y_3 に関係する部分を新しいサブパート K_s とし、一行おきに消去・縮合を行えば(図-2②部)、縮合された行はやはり上下端を除いて各縦列毎に同じ値が並び、2箇所の②部は、全く同一であるから、やはり最下層のみ1回の演算を行えばよい。従って、各段階での消去を一行おきに行うと考えれば内部行は同じ値が並ぶから、各段階毎にサブマトリックス K_s を求め、各段階で1回の消去・縮合演算を行えばよいから、計算容量の低減、計算時間の短縮が期待できる。

キーワード 相似形メッシュ サブパート 縮合

連絡先(〒866-0065 八代市豊原下町4227-2・TEL 0965-35-4285)

2. 3 解析手法

今、図-2モデルで、縦方向の分割数を $n = 2^p$ とし、中間行を全て消去して $K_s = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \dots (1)$ Y_1, Y_{n+1} 行に縮合する事を考える。なおサブパートは前と同位置とする。縦方向の分割数に対応して作成したサブマトリックス K_s を式(1)で表す。これ $\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 \\ K_{21} & K_{22} & K_{12} \\ 0 & K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} = 0 \dots (2)$ は、図-1のA部の剛性マトリックスであり、マトリックスの各項は、 Y_1, Y_2 行に対応している。B部もこれと同じマトリックスであるから図-1の系はこれを重ね合わせ $K_c = \begin{bmatrix} \bar{K}_{11} & \bar{K}_{12} \\ \bar{K}_{21} & \bar{K}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} - K_{12} \bar{K}_{22}^{-1} K_{21} & -K_{12} \bar{K}_{22}^{-1} K_{12} \\ -K_{21} \bar{K}_{22}^{-1} K_{21} & K_{22} - K_{21} \bar{K}_{22}^{-1} K_{12} \end{bmatrix} \dots (3)$ ることにより得られ、剛性方程式は式(2)となる。但し、 $\bar{K}_{22} = K_{11} + K_{22}$ 、 y は対応する変位である。式(2)より y_2 の消去を行えば、縮合されたマトリックス K_c として式(3)が得られる。式(3)を新しい K_s として式(2)を作成、 Y_2 行の消去・縮合とこの演算を p 回繰り返せば求める Y_1, Y_{n+1} 行に関する縮合マトリックスは求められる。

3. 数値計算

図-3のような左端固定、右端自由で高さが変化する片持ち梁について、本法と反復法(ICCG法)とで数値計算を行った。左右端寸法は固定し、長さを4通り変化させたモデルについて計算時間を比較した。右自由端に鉛直荷重 $P = 640 \text{ kgf}$ が作用するものとし、他モデル諸元を表-1に示す。縦方向は等分割、横分割はメッシュ縦横の比が1となるように分割した。相似メッシュの各寸法は横方向分割数 $n = 2^p$ とすると、相似比 r 、 Y 行の高さ b_j 、幅 L_j は、それぞれ式(4)~(6)より得られる。結果を図-5グラフに示す。縦軸は反復法を基準とした計算時間比、横軸は系の総自由度とし、全節点変位を求めるのに必要な演算時間で比較している。計算容量については、反復法は系の全自由度に、本法はサブパート部の自由度に依存する。モデルA(縦横比1:1)でも本法が有利であった。計算時間では、反復法は同じく系の全自由度に依存する。横分割数は 2^p より、消去すべき内部行は $2^p - 1$ 行であるが、本法では、各段階で最下行のみの演算すなわち p 回で済む。ただし、各段階で縦1行の自由度を持つマトリックス演算を5回必要とする。従って、縦分割が少なく横分割数が多いほど(モデルD)その効果は大となる。結果より縦横分割数比が1:2以上であれば、本軌跡法が有効であるといえよう。

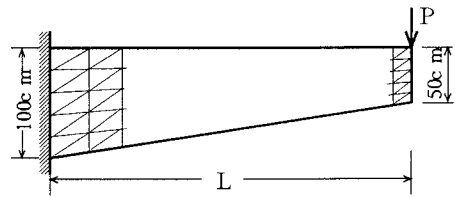


図-3 変断面持つ片持ちはり

表-1 片持ち梁諸元

諸元	数値
左端(b)	100cm
右端(a)	50cm
スパン(L)	L cm
厚さ(t)	1cm
ポアソン比(ν)	0.3

$$b = a r^n \text{ より } r = \sqrt[n]{\frac{b}{a}} \dots (4)$$

$$\text{高さの一般項; } b_j = a r^j \dots (5)$$

$$d = \frac{1-r}{1-r^n} L \text{ より } \text{幅の一般項; } L_j = d \sum_{m=0}^{j-1} r^m \dots (6)$$

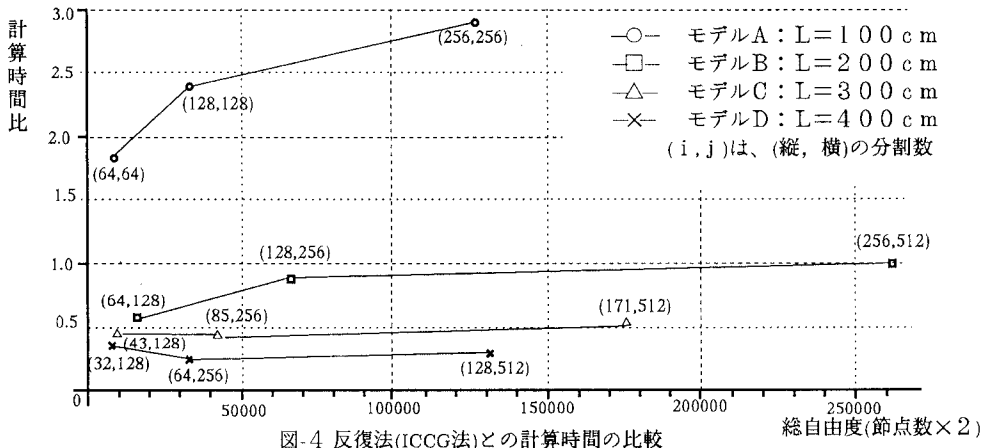


図-4 反復法(ICCG法)との計算時間の比較