

I-A65 陰関数的技法による非線形弾性分岐・安定問題

広島大学 学生会員 ○海田 辰将^{*1}広島大学 正会員 有尾 一郎^{*1}広島工業大学 正会員 佐藤 誠^{*2}

1. はじめに

本研究では、幾何学的非線形性を持つ構造系として図-1に示すような 2bars-truss モデルを採用し、系の自由度を2自由度として釣合式の導出とその臨界値パラメータおよび最大耐荷力を示す。また、エネルギー原理から系の静力学的非線形安定性、幾何学的非線形性を持つライズパラメータ γ の変化に対する分岐座屈現象および系の最大耐荷力について解析を行い、その最大値を示す最適ライズ比 γ_{cr} を求める。

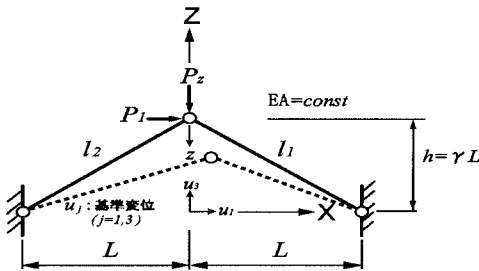


図-1 2自由度 2bars-truss モデル

2. 陰関数的処理と最大耐荷力

この系に蓄えられる全ポテンシャルエネルギー Π はひずみエネルギーと外力ポテンシャルの和として

$$\Pi = \sum_{i=1}^2 \frac{EAL}{2\eta} (\xi_i - \eta)^2 + (-P_1 u_1^* L - P_z z^* L)(1)$$

と表される。ただし、 ξ_i は u_1^* , z^* の関数であり、 η はライズ比 γ より決まる定数である。また、 u_1^* および z^* は $u_1^* \equiv u_1/L$, $z^* \equiv z/L$ と基準化する。こ

こで、式(1)に $z^* = \gamma - u_3^*$ を代入して絶対変位の座標系とし、ポテンシャルエネルギー停留原理

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_1^*} \delta u_1^* + \frac{\partial \Pi}{\partial u_3^*} \delta u_3^* = 0 \quad (2)$$

を用いる。式(2)の δu_1^* , δu_3^* は微小な任意の値をとるので、系の釣合条件は $\partial \Pi / \partial u_1^* = 0$ および $\partial \Pi / \partial u_3^* = 0$ となる。これから系の耐荷力 P_1, P_z を求め、これらはそれぞれ u_1^*, u_3^*, γ の関数として得られる。また、系の安定性は、式(1)で求めた Π の第2変分からなる接線剛性行列式

$$\det J = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial (u_1^*)^2} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial u_1^* \partial u_3^*} \\ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial u_3^* \partial u_1^*} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial (u_3^*)^2} \end{bmatrix} \quad (3)$$

の符号によって判定される。すなわち $\det J > 0$ で安定、 $\det J = 0$ で臨界、 $\det J < 0$ で不安定となる。また、主径路上の臨界状態から

$$\det J(u_1^*, u_3^*, \gamma)|_{u_1^*=0} = 0 \quad (4)$$

となり、陰関数表示される。また、 $z_{cr}^* = \gamma$ と $P_{cr}/EA - \gamma$ の関係から

$$\begin{cases} z^* = \mathcal{F}(\gamma) \\ P_{cr}/EA = \mathcal{H}(z^*) = \mathcal{H}(\mathcal{F}(\gamma)) \end{cases} \quad (5)$$

と求まる。ここに $\mathcal{F}, \mathcal{H}$ は関数を意味する。これにより γ と臨界鉛直変位および最大耐荷力の関係が得られる。

3. ライズ比 γ の変化に伴う不安定領域

図-2に $\gamma = 0.5, 2.5$ の場合の静力学的不安定領域を示す。図中、黒塗りの部分は Π の第2変分が負となる不安定領域であり、この不安定領域内は構造物にとって危険な状態となる。

$\gamma = 0.5$ の場合、外力が作用して u_3^* が増加し、特異点に達すると瞬時に飛移り (snap-through) が発生する (図-2(a) 参照)。このときの、特異点に達するまでの径路が主径路であり、それ以降は分岐

⁰ key words: geometrical nonlinear structure, bifurcation

^{*1} 〒 739-8527 広島市鏡山 1-4-1

^{*2} 〒 731-51 広島市佐伯区三宅 2-1-1

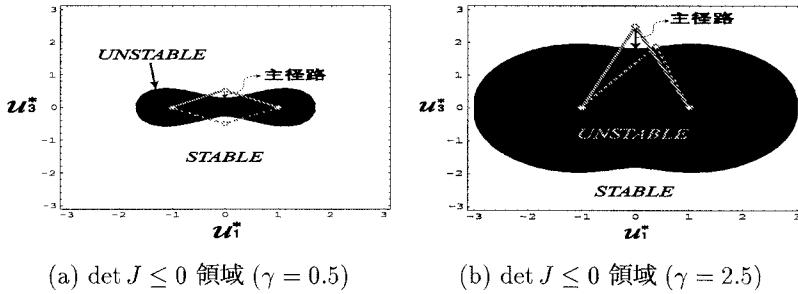


図-2 Jacobian 行列式による安定・不安定領域

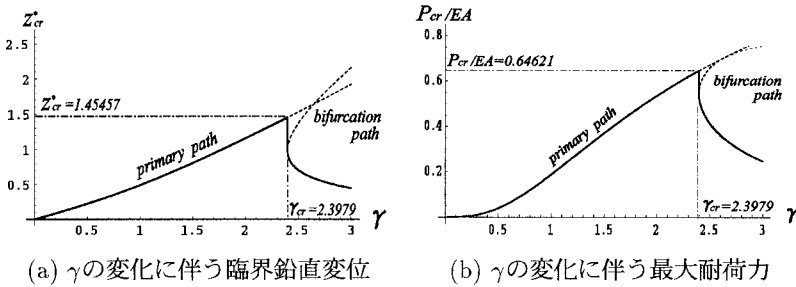


図-3 γ に対する臨界鉛直変位および最大耐荷力の関係

径路となる。これに対し、 $\gamma = 2.5$ の場合、主径路から分岐径路へと移る際、飛移りによって反対側の安定領域へと移るよりも、不安定領域の縁に沿って変位するほうがより少ないエネルギーで移動できるようになり、このとき系は対称性を失い、横倒れを起こす (図-2(b) 参照)。

4. パラメータ γ と最大耐荷力

式 (6) にライズパラメータ γ を代入し、変化させたときの主径路 ($u_1^* = 0$) 上における臨界鉛直変位 z_{cr}^* および鉛直方向の静的最大耐荷力 P_{cr}/EA の変化をそれぞれ図-3(a)(b) に示す。この両図において、 $\gamma < \gamma_{cr}$ となる径路については主径路を示し、破線で表された $\gamma > \gamma_{cr}$ となる径路では分岐径路を示す。しかしながら実際は、複数存在する分岐径路の内、最も値の低い径路 (図中の実線) で分岐座屈を起こす。図-3(b) より、この系の最大耐荷力は $P_{cr}/EA = 0.64621$ であり、そのときのライズ比は $\gamma_{cr} = 2.3979$ であることが分かった。こ

れは参考文献 [1] の理論値 $\sqrt{5.75}$ と一致した。

5. 結論

- 1) この系のライズ比 γ を含む主径路上の陰関数的解析手法によって、系が静的最大耐荷力および臨界鉛直変位を生じるときの臨界ライズ比は $\gamma_{cr} = \sqrt{5.75}$ となり、このとき最大の耐荷力を発揮することが数値解析的に求められた。
- 2) 2bars-truss の弾性分岐形態については、 $\gamma = \sqrt{5.75}$ の前後で飛移りと横倒れの2種類が確認され、 $\gamma < \sqrt{5.75}$ の場合、 γ の増加に伴って $z_{cr}^*, P_{cr}/EA$ 共に増加するが、 $\gamma = \sqrt{5.75}$ においてその耐荷力を急激に失う。

参考文献 [1] W.Hartono, F.Nishino, O.Fujiwara and P.Karasudhi : On Tracing Bifurcation Equilibrium Paths of Geometrically Nonlinear Structures, Japan Society of Civil Engineering, Vol.4, No.1, April, 37-43p, 1987