土木学会第54回年次学術講演会（平成11年9月）

I－A46 座屈固有値増分に着目した非線形座屈特異点解析

八代工業高等専門学校　正員　橋本　淳也
建設省 九州地方建設局　正員　宮元　謙次
熊本工業大学　工学部　正員　三池　亮次
熊本大学　工学部　正員　小林　一郎

1.はじめに

骨組構造が有限変位を行った後に分岐座屈を行う場合の座屈固有値解析の一つの解法を提起するものである。この座屈点は、特異点となるために数値解析を実行する上において、多くの困難を伴い、古くから多くの研究者の注目を浴びている。その多くは座屈点において接線剛性マトリックス$\mathbf{K}_T$の行列式$|\mathbf{K}_T|=0$となる点を追求するものであった。ここでは、制御変位法による有限変位解析を行い、座屈近傍点で座屈増分荷重$\Delta\lambda$が0となるように座屈点に接近する非線型座屈解析を行う。

2.有限変位解析

筆者らが、Lagrange-Euler有限変位仮想仕事の定理に従って先に誘導した有限変位構造解析の基礎式に基づいて解析を進める。

点S'において荷重変位が$\mathbf{P}',\mathbf{d}'$であり、それからの荷重変位増分が$\Delta\mathbf{P},\Delta\mathbf{d}$であったとすると

$$\Delta\mathbf{P}=\mathbf{K}\Delta\mathbf{d}+\mathbf{b} \tag{1}$$

ここに剛性マトリックス$\mathbf{K}$と$\mathbf{b}$は、それぞれ

$$\left.\begin{array}{c}\mathbf{K}=(\mathbf{C}'+\Delta\mathbf{C})\mathbf{K}_m(\mathbf{C}'+\Delta\mathbf{C})^T\\ \mathbf{b}=\Delta\mathbf{C}\mathbf{p}'_m-(\mathbf{C}'+\Delta\mathbf{C})\mathbf{K}_m\Delta\mathbf{e}_{m\theta}\end{array}\right\} \tag{2}$$

であり、S'における接続マトリックスを$\mathbf{C}'$、その増分を$\Delta\mathbf{C}'$とした。

軸力しか生じないまた軸方向の伸縮しか生じない理想的なピン結合トラスを対象とするとき、上式の部材剛性マトリックス$\mathbf{K}_m$はバネ定数$k=\frac{EA_I}{L_{I,0}}$を要素とする対角マトリックスとがある。Eはヤング率、A_Iは第I部材の断面積、$L_{I,0}$は初期部材長でバネ定数は初期部材長$L_{I,0}$によってのみ定まり、部材長に関わらず一定とする。$\mathbf{p}'_m$は、S'点における部材断面力（軸力）ベクトルである。式(1)を増分変位$\Delta\mathbf{d}=\{\Delta d_i\}$で微分すれば

$$\delta\Delta\mathbf{P}=(\mathbf{K}'_E+\mathbf{K}'_G)\delta\Delta\mathbf{d}=\mathbf{K}'_T\delta\Delta\mathbf{d} \tag{3}$$

ここに$\mathbf{K}'_E,\mathbf{K}'_G$は、$S'$点における弾性剛性マトリックス、幾何剛性マトリックスであり、

$$\left.\begin{array}{c}\mathbf{K}_E=\mathbf{C}'\mathbf{K}_m\mathbf{C}'^T\\ \mathbf{K}_G=\left[\frac{\partial(\mathbf{C}'+\Delta\mathbf{C})}{\partial\Delta d}\right]_{\Delta\mathbf{d}=0}\mathbf{p}'_m\end{array}\right\} \tag{4}$$

である。トラスの$\mathbf{K}_G$が部材の方向余弦ベクトルを用い簡潔に表せることについても既に発表の通りである。

3.非線形座屈特異点

S'点において構造物は、荷重$\mathbf{P}'$を受け変位$\mathbf{d}'$と軸方向力$\mathbf{p}'_m$を生じ釣り合っているものとする。これまでの荷重-変位曲線は変位制御法によって得られたものとする。このS'の状態において構造物が更に荷重増分を受けるものとする。このときこの増分荷重に伴う変位$\Delta\mathbf{d}'$が微少で、構造物の形状にほとんど変化がないと仮想する。その状態における軸方向力は、$\mathbf{p}_m=\mathbf{p}'_m+\Delta\mathbf{p}_m$ のみが、大きく変わり荷重-変位における特異点すなわち座屈点に達するものとする。たとえば分岐特異点であれば$\mathbf{d}$に対し$\mathbf{P}$は2価関数であるから、S点において、

$$(\mathbf{K}'_E+\mathbf{K}'_G)\delta\Delta\mathbf{d}=0 \tag{5}$$

キーワード：非線形座屈解析　有限変位　固有値解析　変位制御法　骨組
連絡先：〒866－8501 熊本県八代市平山新町2627 八代高専土木建築工学科　TEL　0965－35－1611　FAX　0965－33－0616
（橋本淳也）

ここに

$$\mathbf{K'}_G=\left[\frac{\partial(\mathbf{C'}+\Delta\mathbf{C})}{\partial\Delta d}\right]_{\Delta\mathbf{d}=0}(\mathbf{p'}_m+\Delta\mathbf{p}_m) \tag{6}$$

となる。形状の変化は無視されるので式 (3) において、$\mathbf{p'}_m$が$\mathbf{p}_m=\mathbf{p'}_m+\Delta\mathbf{p}_m$に、変わるだけである。
式(5)より

$$\left\{(\mathbf{K'}_E+\left[\frac{\partial(\mathbf{C'}+\Delta\mathbf{C})}{\partial\Delta d}\right]_{\Delta\mathbf{d}=0}\mathbf{p'}_m)+\left[\frac{\partial(\mathbf{C'}+\Delta\mathbf{C})}{\partial\Delta d}\right]_{\Delta\mathbf{d}=0}\Delta\mathbf{p}_m\right\}\delta\Delta\mathbf{d}=0 \tag{7}$$

式(1)を用い、$\mathbf{K}=\mathbf{K}_E$として

$$\Delta\mathbf{p}_m = \mathbf{K}_m(\mathbf{C'}+\Delta\mathbf{C})^T\Delta\mathbf{d}-\mathbf{K}_m\Delta\mathbf{e}_{m\theta} \tag{8}$$

$$= \mathbf{K}_m\mathbf{C}^T\mathbf{K}_E^{-1}(\Delta\mathbf{P}-\mathbf{b})-\mathbf{K}_m\Delta\mathbf{e}_{m\theta} \tag{9}$$

また、$\Delta\mathbf{P}=\Delta\lambda\mathbf{P}_o$とすると変位が微少であれば、$\mathbf{D}=\mathbf{K}_m\mathbf{C}^T\mathbf{K}_E^{-1}$として

$$\Delta\mathbf{p}_m=\Delta\lambda\mathbf{D}\mathbf{P}_o-\mathbf{D}\mathbf{b}-\mathbf{K}_m\Delta\mathbf{e}_{m\theta}\fallingdotseq\Delta\lambda\mathbf{D}\mathbf{p}_o$$

$$(\mathbf{A}+\Delta\lambda\mathbf{B})\delta\Delta\mathbf{d}=0 \tag{10}$$

ここに$\mathbf{A}=\mathbf{K'}_E+\left[\frac{\partial\mathbf{C}+\Delta\mathbf{C}}{\partial\Delta d}\right]_{\Delta\mathbf{d}=0}\mathbf{p'}_m$, $\mathbf{B}=\left[\frac{\partial\mathbf{C}+\Delta\mathbf{C}}{\partial\Delta d}\right]_{\Delta\mathbf{d}=0}\mathbf{D}\mathbf{p}_o$

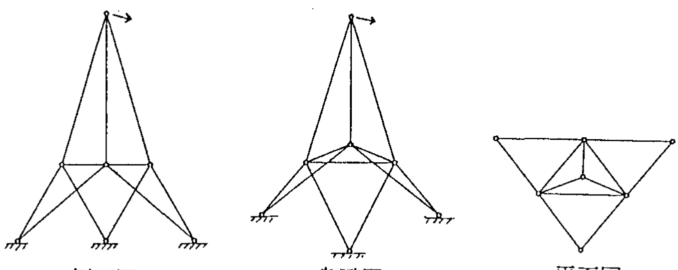
式(10)に基づいて、固有値$\Delta\lambda$を求めることができる。
もし、この$\Delta\lambda$が大きいときS'点において構造物の変位$\Delta\mathbf{d}$は、実は有限変位し大きく変形するから、$\Delta\lambda$は求める増分荷重となり得ない。このようなときには、与えられた制御変位に基づいて有限変位解析を続行するのみである。
有限変位解析が進行して、S'が真の特異点Sに接近したとき、$\Delta\mathbf{p}_m$は0に近づいて$\Delta\lambda$は十分に小さくなる。すなわち$\Delta\lambda$は0に、$\mathbf{K'}_E,\mathbf{K'}_G$は$S$点の$\mathbf{K}_E,\mathbf{K}_G$に近づく、このときの変位制御法で求めた荷重が座屈荷重となる。屈服や分岐座屈に適用される。
数値解析を進め点が特異点に近づいたとき、$\Delta\lambda$は次第に小さくなるのはもちろんであるが解析上多くの難点が現される。これらの条件を加味して、下記のような幾つかの例題を得た。

4.例題

下の図に示すような12部材立体トラスについて上式を使って解析を行った。

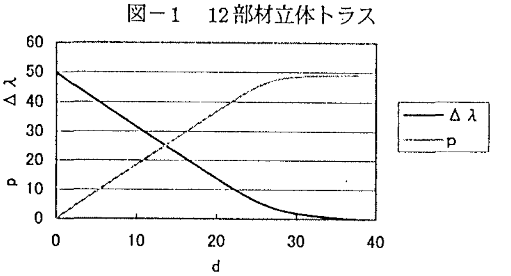
表－1 モデルの座標

	X	Y	Z
①	0.0	0.0	0.0
②	200.0	350.0	1500.0
③	400.0	700.0	0.0
④	600.0	350.0	1500.0
⑤	800.0	0.0	0.0
⑥	400.0	0.0	1500.0
⑦	400.0	238.0	1700.0



図－1 12部材立体トラス

総部材数 12
総節点数 7
ヤング率 1000 kgf/cm^2
断 面 積 1.0 cm^2
制御変位 節点⑦のZ方向に－1.0 cm



図－2 増分座屈荷重,荷重－変位曲線

図－2のような荷重－変位曲線を得た。
その結果、座屈固有値増分を0となる点を捜索することで座屈点を調べることは可能であると確認された。