

I-A43

空間梁の有限変位解析の精度に関する考察

東北大学大学院工学研究科 ○学生員 桑高 崇
東北大学大学院工学研究科 正 員 岩熊 哲夫
東北大学大学院工学研究科 正 員 後藤 文彦

1. まえがき

梁の三次元有限変位解析では何等かの回転群を用いて座標変換を記述する必要があるが、回転自由度もこれに準ずる。回転擬似ベクトルは軸性ベクトルとして扱えるために、回転自由度に用いてもそれを座標変換することができ最も多用されているが、回転擬似ベクトルで記述した座標変換行列の成分は特異点を有し、また増分式は非常に煩雑になる。一方、ベクトルとして扱えないオイラー角を回転自由度とした場合、それをそのままの形で座標変換することができないので、曲がり梁の解析に不利であるが、オイラー角で記述した座標変換行列の成分は一对一写像ではないものの特異点を含まず増分式も比較的簡潔である。さて、座標変換をオイラー角で記述しつつも回転自由度に空間固定三軸回りの微小回転角を用いれば、曲がり梁を容易に解析できる。本研究では、そのような座標変換と回転自由度に用いる回転角の組み合わせが精度、解析対象の制約、定式化の煩雑さなどの面に与える影響を考察する。またそれを考慮した定式化を行い、それが座屈荷重や座屈後挙動に及ぼす影響についても調べる。

2. 定式化

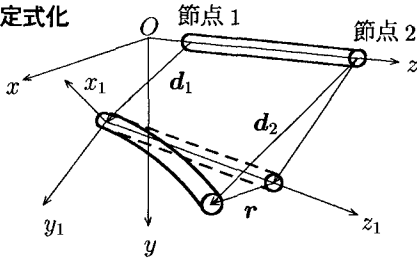


図-1 梁要素の変形

図-1のように変位 d と相対変位 r を定義し、外力 f のモーメント成分は回転自由度に用いる回転群と仕事を成分として定義する。これらの局所系での表現は上付添字 ℓ で表すことにすると、仮想仕事の式 $f^T \delta d = f^{\ell T} \delta r^{\ell}$ より、全体系の外力と局所系の外力を結びつける関係式 $f = R^T f^{\ell}$ が得られる。これに局所系で成り立つ線形理論の剛性方程式 $f^{\ell} = K r^{\ell}$ を代入すれば、

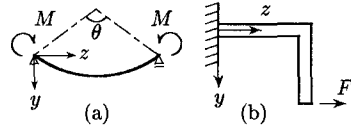


図-2 解析モデル

剛性方程式 $f = R^T K T^T r$ が得られ、これの d に関する増分式

$$\Delta f = K_{t1} \Delta d \quad (1)$$

が接線剛性方程式となる¹⁾。座標変換行列 T と変位ベクトル d の回転自由度に、共に回転群を用いて解析する場合は、式(1)を用いればよい。回転自由度に空間固定三軸回りの微小回転角 $(\Delta\theta_x, \Delta\theta_y, \Delta\theta_z)$ を用いる場合は、これを回転自由度とする変位ベクトル増分 $\Delta \bar{d}$ と回転群を回転自由度とする変位ベクトル増分 Δd との変換式 $\Delta d = S \Delta \bar{d}$ を仮想仕事式に考慮して剛性方程式 $\bar{f} = S^T R^T K T^T r$ を得る。ここに $\bar{f}$ はモーメント成分が空間固定三軸回りの成分で定義される外力ベクトルである。この式の d に関する増分を取った後、 $\Delta d = S \Delta \bar{d}$ を代入することにより、次の接線剛性方程式を得る¹⁾。

$$\Delta f = \left[\frac{\partial S^T}{\partial d} R^T K T^T r S + S^T K_{t1} S \right] \Delta \bar{d} = K_{t2} \Delta \bar{d} \quad (2)$$

回転自由度に $(\Delta\theta_x, \Delta\theta_y, \Delta\theta_z)$ を用いて解析する場合は、式(2)を用いればよい。以上の定式化で数値解析を行うが、座標変換にオイラー角、回転擬似ベクトルを用いた場合の接線剛性行列をそれぞれ K_{t1}^E , K_{t1}^P と表す。

3. 円弧アーチの横倒れ座屈

座標変換にオイラー角を用いても、回転自由度に固定三軸回りの回転角を用いれば曲がり梁を容易に解析できることはまえがきで述べたが、これが、座標変換と回転自由度の両者に回転擬似ベクトルを用いた一般的な定式化に比べて精度に問題があるかどうかを検討する。ここでは、それを考慮した解析解²⁾の存在するアーチの横倒れ座屈を解析するが、上付添字の $E2$ や $P1$ の数字部分は相対回転角の成分 (S^{-1} の成分に相当) を要素の一端の値だけで記述したか両端の平均を用いて記述した

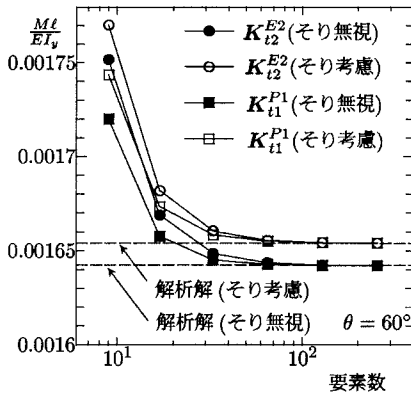


図-3 座屈解の収束

かを意味する。オイラー角を用いる場合は精度を上げるため、両節点の平均を用いた。 K_{t2}^{E2} 、 K_{t1}^{P1} の増分式のサブルーチンのファイルのサイズはそれぞれ18KB、450KB であり、 K_{t2}^{E2} は K_{t1}^{P1} に比べて十分に容量は小さい。解析モデルは図-2に示す。図-3に中心角 60° のアーチの解析解への収束状況を示す。それを考慮した場合、無視した場合の数値解は共にそれぞれの解析解に収束し、その影響が座屈解に反映されていることが分かる。少ない要素数では、 K_{t2}^{E2} は K_{t1}^{P1} よりも精度が落ちるが、要素数を増やせば十分な精度が得られ、収束速度もほとんど変わらない。

4. L型片持ち梁の横倒れ座屈

アーチの横倒れ座屈の結果から、 K_{t2}^{E2} が K_{t1}^{P1} と同程度の精度を与えることが分かったので、回転擬似ベクトルを自由度とした既存の数値解が存在するL型片持ち梁の座屈後の挙動を K_{t2}^{E2} で解析してみる。解析モデルは、同じく図-2に示す。荷重と先端部の面外変位の関係をCrisfield³⁾の解、Simoら⁴⁾の解とともに図-4に示す。ここでは比較のためそりを無視した解析を行った。本解析では座屈荷重は1.088(N)と求まり、Simoらの1.09(N)とほぼ一致している。座屈後挙動はSimoらの結果と比べると本数値解はやや小さめであるが、Crisfieldの結果とはほぼ一致している。次に座屈後挙動におけるそりの影響を確かめるため、同様の解析モデルで梁断面を矩形断面からそりによる影響が出やすいI型断面に変え、そりを考慮した解析を行った。結果を図-5に示す。そりを考慮した場合は無視した場合に比べ座屈点は大きくなり、変位も小さくなる。

5. まとめ

座標変換と回転自由度に回転擬似ベクトルを用いた一般的な定式化と、座標変換にはオイラー角、回転自由度

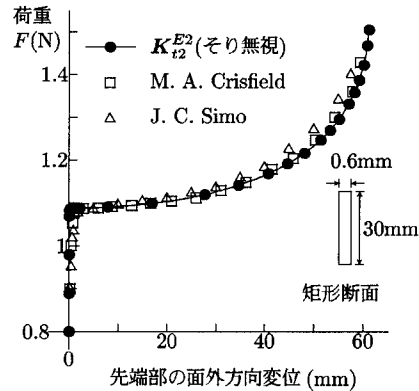


図-4 荷重と端部面外変位の関係

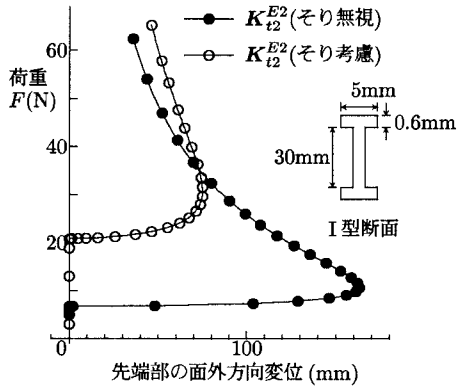


図-5 荷重と端部面外変位の関係

には固定三軸回りの回転角を用いた定式化とを導出し、解析解の存在するアーチの座屈を解析したところ、後者は前者と同程度の結果を与えることが分かった。そこで後者を用いてL型片持ち梁の座屈後挙動を解析してみたところ、回転擬似ベクトルを自由度として計算した既存の数値解とほぼ一致した。またそりを考慮すると、座屈荷重及び座屈後挙動に有意な差が現れることが分かった。

参考文献

- 1) 後藤文彦, 小林裕, 斎木功, 岩熊哲夫: 空間固定三軸回りの回転自由度を用いた空間梁解析, 応用力学論文集 Vol. 1, pp. 319-327, 1998.
- 2) Propan Vacharajittiphan and Nicholas S. Trahair: Flexural-torsional buckling of curved members, JOURNAL OF THE STRUCTURAL DIVISION, ST6, pp. 1223-1238, 1975.
- 3) Crisfield, M. A.: A consistent co-rotational formulation for non-linear, three-dimensional, beam-elements, Compt. Meths. Appl. Mech. Engrg., 81, pp. 131-150, 1990.
- 4) Simo, J. C. and Vu-Quoc, L.: A three-dimensional finite-strain rod model. PartII, Compt. Meths. Appl. Mech. Engrg., 58, pp. 79-116, 1986.