

I-A41

変位法構造解析での弾性カテナリー要素*

法政大学工学部 学生会員 大隅 祐史 / 正会員 阿井 正博†

飯田長姫高等学校 今井 裕敬

1. はじめに -. 基本的なケーブルの扱いとしては引張直線要素があり、たわみを考慮した放物線/カテナリー・ケーブルによる変位法要素も示されている^{1),3)}。ここでは、弾性カテナリーを変位法に用いる手順について、特にその特異状態に注目して考える。

2. 弾性カテナリー要素 -. 伸びを考慮した単位長さ自重 w のLagrange表現としてのケーブルのつり合い形状は、 $\{x, y\}$ を水平、重力方向、 s を初期長さ座標として

$$x(T_0; s) = \frac{T_{0x}s}{EA} + \frac{T_{0x}}{w} \log \left\{ \frac{T_{0y} + \sqrt{T_{0x}^2 + T_{0y}^2}}{(T_{0y} - ws) + \sqrt{T_{0x}^2 + (T_{0y} - ws)^2}} \right\} \quad (1a)$$

$$y(T_0; s) = \frac{T_{0y}s - \frac{w}{2}s^2}{EA} + \frac{1}{w} \left\{ \sqrt{T_{0x}^2 + T_{0y}^2} - \sqrt{T_{0x}^2 + (T_{0y} - ws)^2} \right\} \quad (1b)$$

と表される($0 \leq s \leq l$, l : ケーブル長, EA : 伸び剛性)。始端張力成分 $\{T_{0x}, T_{0y}\}$ は弾性カテナリーのパラメータであり、 $\{\bar{x}, \bar{y}\}$ の両端間に張られたケーブルは、 $\{x(l), y(l)\} = \{\bar{x}, \bar{y}\}$ の適合条件を満たす $\{T_{0x}, T_{0y}\}$ を求める問題に帰着する。

終端張力の微小変化による終端の変位を表す接線撓性マトリックス($\delta \mathbf{x}_l = [S(T_l)] \delta T_l$)は、式(1)を微分して

$$[S] = \begin{bmatrix} \frac{l}{EA} + \frac{1}{w} \{ \log(\frac{T_{0y} + T_0}{T_{ly} + T_l}) + \frac{T_{ly}}{T_l} - \frac{T_{0y}}{T_0} \} \\ \text{Sym.} \\ \frac{T_{0x}}{w} (\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_l}) \\ \frac{l}{EA} + \frac{1}{w} (\frac{T_{0y}}{T_0} - \frac{T_{ly}}{T_l}) \end{bmatrix} \quad (2)$$

で得られる($\{T_{lx}, T_{ly}\} = \{T_{0x}, T_{0y}\} - \{0, wl\}$)。マトリックス $[S(T_0)]$ は正定値対称であり、 $\delta F(T_l) = x_l(T_l) \delta T_{lx} + y_l(T_l) \delta T_{ly}$ の積分である補ポテンシャル $F(T_l)$ は正凸となり、全補ポテンシャル:

$$W^*(T_l) (= F(T_l) - (\bar{x}T_{lx} + \bar{y}T_{ly}))$$

$$= \frac{1}{2w} \left\{ T_{0x}^2 \log \left(\frac{T_{0y} + T_0}{T_{ly} + T_l} \right) + T_{0y}T_0 - T_{ly}T_l \right\} + \frac{l}{2EA} (T_{0x}^2 + T_{0y}T_{ly}) - (\bar{x}T_{lx} + \bar{y}T_{ly}) \quad (3)$$

は、前述の適合状態で最小値をとる。ここに、 $T_0 = \sqrt{T_{0x}^2 + T_{0y}^2}$, $T_l = \sqrt{T_{lx}^2 + T_{ly}^2}$ である。

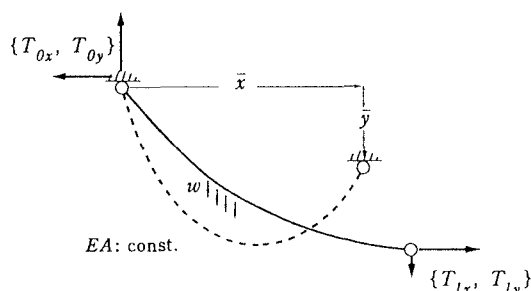


図1: 弾性カテナリー・ケーブル要素

全体のつり合い以前に、両端節点位置毎の前述の適合問題が解かれる必要があるが、この正凸ポテンシャル問題で収束が保証される繰返し計算として例えば部分修正法がある: 初期値 $T_{l[0]}$ と $0 < \theta_0 \leq 1$ の基本修正係数 θ_0 を与えて計算を開始するが、 $[i]$ 回目の誤差 $\Delta \mathbf{x}_{l[i]} = \mathbf{x}(T_{l[i]}) - \bar{\mathbf{x}}$ 、接線撓性 $[S]_{l[i]}$ および補ポテンシャル $W_{l[i]}^*$ が得られた段階を考える。ベクトル誤差 $\Delta \mathbf{x}_{l[i]}$ と同次のスカラー誤差として

$$R_{l[i]} = \sqrt{(\Delta \mathbf{x}_{l[i]}^T [S]_{l[i]}^{-1} \Delta \mathbf{x}_{l[i]})} \quad (4)$$

を用いる。この $\frac{1}{2} R_{l[i]}^2$ は、現 $W_{l[i]}^*$ のその最小値(解での)からのエネルギー差の第1近似を表す。ここで、接線係数 $[S]_{l[i]}$ の上で、全誤差 $\Delta \mathbf{x}_{l[i]}$ を修正するNewton-Raphson法ではなく、その一部 $\theta_{l[i]} \Delta \mathbf{x}_{l[i]}$, $0 < \theta_{l[i]} \leq 1$ を修正する

$$T_{l[i+1]} = T_{l[i]} - \theta_{l[i]} [S]_{l[i]}^{-1} \Delta \mathbf{x}_{l[i]} \quad (5)$$

の方法を考える。このとき、修正係数 $\theta_{l[i]}$ は、初回値は θ_0 とするが、 $R_{l[i]} \rightarrow 0$ で $\theta_{l[i]} \rightarrow 1$ とするのが合理的であり

$$\theta_{l[i]} = \min. \left(\frac{\theta_0 R_{l[0]}}{R_{l[i]}}, 1 \right) \quad (6)$$

* キーワード: ケーブル要素, 弾性カテナリー, 変位法

† 連絡先: 〒184-8584 小金井市梶野町3-7-2 / Tel. 042-387-6277, Fax. #-6124

で与えるものとする。修正 $[i] \rightarrow [i+1]$ での誤差の改善は、 W^* の減少をみるのが理論上正しいが、前記のようにその差は Δx_i の2次以上の項となり、解の近傍で数値的比較は難しくなる。逆に、 $R_{[i]}$ の値は解の近くで正確となり、ここでは

$$W_{[i]}^* > W_{[i+1]}^* \quad \text{for } \theta_{[i]} < 1 \quad (7a)$$

$$R_{[i]} > R_{[i+1]} \quad \text{for } \theta_{[i]} = 1 \quad (7b)$$

で収束傾向を確認する。式(7)が不成立のとき、その理由は $\theta_{[i]}$ が(したがって、基本修正係数 θ_0)が大き過ぎること以外なく、 $[i]$ 回目に戻って修正を半減： $\theta_0 \rightarrow \frac{1}{2}\theta_0$ させて、計算をやり直すものとする(必要回数だけ)、解への収束が保証される²⁾。

3. 特異状態まわりの処理 - 弛緩/緊張状態を問わず、2.の弾性カテナリー・ケーブルはつり合い状態を正確に表現するが、 $T_x = T_{0x} = T_{lx} = 0$ で鉛直に垂れ下がる時に幾分の特異性を呈する。ここで、図2に示す i) $T_{0y} > wl$, ii) $T_{0y} < 0$, iii) $0 \leq T_{0y} \leq wl$ の場合に分けて、その処理を考える。式(1)のつり合い形状と式(3)の補ポテンシャルは、 $T_x = 0$ の場合であっても、その表現式は適用できる。例えば、i), ii), iii)の順に $|T_{0y}| - |T_{0y} - wl| = T_{0y} - (T_{0y} - wl) = -T_{0y} + (T_{0y} - wl) = -T_{0y} + (T_{0y} - wl)$ であり、式(1b)は

$$y_l = \begin{cases} l \left\{ 1 + \frac{1}{EA} \left(T_{0y} - \frac{wl}{2} \right) \right\} & \dots i) \\ l \left\{ -1 + \frac{1}{EA} \left(T_{0y} - \frac{wl}{2} \right) \right\} & \dots ii) \\ \left(\frac{2T_{0y}}{w} - l \right) + \frac{l}{EA} \left(T_{0y} - \frac{wl}{2} \right) & \dots iii) \end{cases} \quad (8)$$

となり、図2の状態を表現し得る($x(s) = 0$)。

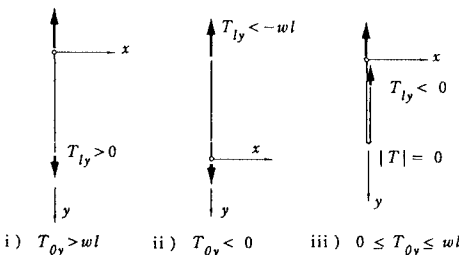


図2: ケーブルの鉛直状態

式(2)の接線撓性に含まれる $\log\{(T_{0y} + T_0)/(T_{ly} + T_l)\}$ は、例えば、ii)の場合では計算できない。このとき

$$\log \left\{ \frac{T_{0y} + \sqrt{T_x^2 + T_{0y}^2}}{T_{ly} + \sqrt{T_x^2 + T_{ly}^2}} \right\} = \log \left\{ \frac{T_{ly} - \sqrt{T_x^2 + T_{ly}^2}}{T_{0y} - \sqrt{T_x^2 + T_{0y}^2}} \right\} \quad (9)$$

と展開でき、i)のとき左辺側、ii)のとき右辺側を用いるものとすれば、前記の問題は回避できる。しかし、iii)のときには、すなわちケーブル中に張力 $|T| = 0$ の箇所があれば、現実には、特異状態 $\partial x_l / \partial T_x \rightarrow \infty$ ($T_x \rightarrow 0$)となり、この接線係数を用いた計算は不能となる。この場合、例えば EA/wl などの十分大きい値を人為的に与えて、2.の計算を続行することが考えられる。変位法要素としての接線剛性 $[k]$ は撓性マトリックス $[S]$ の逆行列で得られるが、2.の計算終了時がiii)の特異状態であれば、 $[k]$ の非対角成分は零値であり、その $T_l - x_l$ 成分を零とすれば正確な値に戻せる。

4. 数値計算例 - 図3の組合せケーブルの変位法解析を、要素剛性を2., 3.のように扱いながら行った。 $EA = 92,000 \text{ tonf}$, $w = 0.395 \times 10^{-3} \text{ tonf/cm}$ であり、ケーブル(1), (2), (3)の初期長さは2000., 2000., 6000. cmとしている。自重鉛直状態(左)で、節点4, 5の y -座標は2000.034, 4000.052 cm、両節点に水平1.tonを作用させたつり合い状態(右)で $\{1412.088, 1410.464\}$, $\{2652.301, 2962.051\}$ cmの位置となる。

数値計算は、左→右、右→左の両方で行ったが、要素の適合条件については、鉛直状態も含めて、いずれも10回程度以下の繰返しで収束している。しかし、全体の変位法つり合い計算では、鉛直状態での水平剛性が極めて小さく(零ではない)特異に近いために、78, 48回の繰返し計算(部分修正法)を要している。

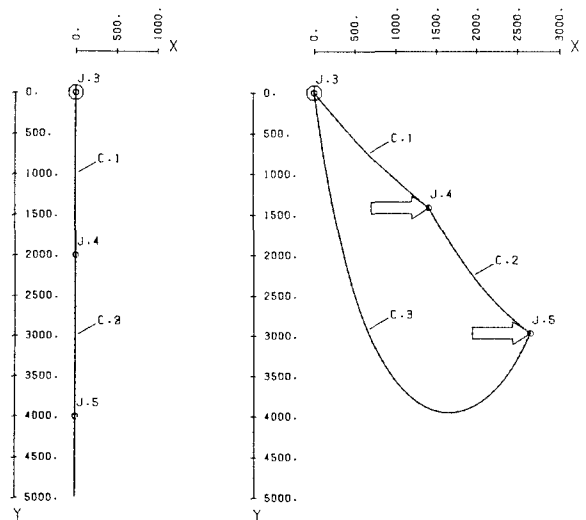


図3: 組合せケーブル

<文献> 1) 前田・林・前田, 土木学会論文集, No.257, 1977-1./ 2) 阿井・西岡・奥村, 土木学会論文集, No.260, 1977-4./ 3) 後藤, 土木学会論文集, No.270, 1978-2.