

I-A38 厚板理論による横等方性円形厚板の非軸対称曲げ解析

北見工業大学大学院 学生員 中本 芳宏
北見工業大学 フェロー 奥村 勇

1. まえがき

厚板の曲げの問題は、古くから攻勢を極めた構造力学の重要なテーマである。2次元及び3次元弾性問題における最近の研究では、異方性固体に目が向けられている。異方性固体の中でも横等方性固体が実用的な必要性からおもに取り扱われている。解析には3次元弾性論による厳密解析と厚板理論による近似解析とがあるが、本研究においては、厚板理論による解析を行う。厚板理論による解析の場合には、近似的になるという短所があるが、3次元弾性論に比べて、理論解析及び数値計算ははるかに容易になると言う大きな長所がある。

本研究は、Loveの理論に改良を加えた厚板理論により、上面に部分扇形分布荷重を受ける周辺単純支持の円形厚板の非軸対称曲げを解析し、その応力特性を明らかにするものである。解析方法は、荷重条件を満たすための特殊解と、境界条件を満たすための同次解とから成っている。特殊解には、一般化されたElliottの解の一部を用い、同次解には、平面応力解、一般化平面応力解及び逆対称応力解を用いる。

2. 特殊解

板の上、下面における荷重条件を満たすための特殊解として、一般化されたElliottの解を用いる。変位成分を u_r 、 u_θ 、 u_z とすると一般化されたElliottの解は、次のように表される。

$$u_r = \frac{\partial}{\partial r} \left[\phi_{01} + \phi_{03} + \gamma_1 \left(r \frac{\partial \phi_1}{\partial r} + z \frac{\partial \phi_3}{\partial z} \right) - \gamma_2 \phi_1 - \gamma_3 \phi_3 \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad (1a)$$

$$u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\phi_{01} + \phi_{03} + \gamma_1 \left(r \frac{\partial \phi_1}{\partial r} + z \frac{\partial \phi_3}{\partial z} \right) - \gamma_2 \phi_1 - \gamma_3 \phi_3 \right] - \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (1b)$$

$$u_z = \frac{\partial}{\partial z} \left[k_1 (\phi_{01} - \gamma_3 \phi_1) + k_2 (\phi_{03} - \gamma_2 \phi_3) + \gamma_1 \left(k_1 r \frac{\partial \phi_1}{\partial r} + k_2 z \frac{\partial \phi_3}{\partial z} \right) \right] \quad (1c)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \nabla_1^2 \phi_{01} + \nu_1 \frac{\partial^2 \phi_{01}}{\partial z^2} &= 0, & \nabla_1^2 \phi_{03} + \nu_2 \frac{\partial^2 \phi_{03}}{\partial z^2} &= 0; \\ \nabla_1^2 \phi_1 + \nu_2 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial z^2} &= 0, & \nabla_1^2 \phi_3 + \nu_1 \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial z^2} &= 0; \\ \nabla_1^2 \psi + \nu_3 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} &= 0 \end{aligned} \quad (2a-e)$$

また、

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{c_{11}\nu_1 - c_{44}}{c_{13} + c_{44}}, & k_2 &= \frac{c_{11}\nu_2 - c_{44}}{c_{13} + c_{44}}; \\ \nu_3 &= \frac{c_{44}}{c_{66}} = \frac{2c_{44}}{c_{11} - c_{12}} \end{aligned} \quad (3a-e)$$

$$c_{11}c_{44}\nu^2 + [c_{13}(c_{13} + 2c_{44}) - c_{11}c_{33}]\nu + c_{33}c_{44} = 0 \quad (4)$$

c_{ij} および ∇_1^2 は、それぞれ、弾性定数および2次元のラプラス

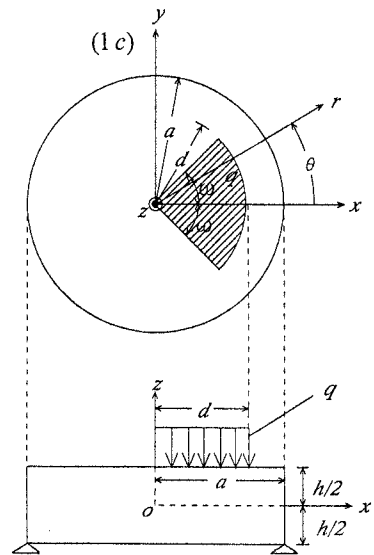


図-1 円形厚板の座標系

キーワード：弾性、横等方性、厚板理論、非軸対称問題、円形厚板

連絡先：〒090-8507 北見市公園町165番地 構造力学研究室 Tel 0157-26-9515 Fax 0157-23-9408

の演算子を表し、 ν_1 、 ν_2 は式(4)の2つの根を表す。いま、円形厚板の座標系を図-1の様に定める。式(1a)から式(1c)に含まれる変位ポテンシャルのうち、円形厚板の非軸対称曲げの特殊解として必要になる変位ポテンシャルは ϕ_{03} 、 ϕ_3 及び ψ のみであり、他は0とできる。式(2b)、式(2d)、式(2e)をそれぞれ変数分離の方法で解いて、それらは、次のように求められる。

$$\phi_{03} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \cos m\theta J_m(\alpha_{ms}r) \left(A_{ms}^{(1)} \cosh \frac{\alpha_{ms}z}{\sqrt{\nu_2}} + L_{ms}^{(1)} \sinh \frac{\alpha_{ms}z}{\sqrt{\nu_2}} \right) \quad (4a)$$

$$\phi_3 = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \cos m\theta J_m(\alpha_{ms}r) \left(C_{ms}^{(1)} \cosh \frac{\alpha_{ms}z}{\sqrt{\nu_1}} + M_{ms}^{(1)} \sinh \frac{\alpha_{ms}z}{\sqrt{\nu_1}} \right) \quad (4b)$$

$$\psi = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \sin m\theta J_m(\alpha_{ms}r) \left(B_{ms}^{(1)} \cosh \frac{\alpha_{ms}z}{\sqrt{\nu_3}} + G_{ms}^{(1)} \sinh \frac{\alpha_{ms}z}{\sqrt{\nu_3}} \right) \quad (4c)$$

ここで、

$$\alpha_{ms} = \frac{\lambda_{ms}}{a} \quad (m = 0, 1, 2, \dots, s = 1, 2, 3, \dots) \quad (5)$$

$$J_m(\lambda_{ms}) = 0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots, s = 1, 2, 3, \dots) \quad (6)$$

また、 $J_m(\alpha_{ms}r)$ は第1種のベッセル関数を表し、 λ_{ms} は式(6)の第 m, s 番目の根とする。

3. 境界条件

円形厚板の上面に部分等分布荷重が作用し、周辺を単純支持とすると境界条件は次式ようになる。

$$z = h/2 \quad \text{において、} \quad \sigma_{zr} = 0, \quad \sigma_{z\theta} = 0, \quad \sigma_{zz} = -p(r, \theta) \quad (7a-c)$$

$$z = -h/2 \quad \text{において、} \quad \sigma_{zr} = 0, \quad \sigma_{z\theta} = 0, \quad \sigma_{zz} = 0 \quad (8a-c)$$

$$r = a \quad \text{において、} \quad T_{rr} = 0, \quad (u_{\theta})_{z=0} = 0, \quad u_z = 0$$

$$M_r = 0, \quad \left(\frac{\partial u_{\theta}}{\partial z} \right)_{z=0} = 0 \quad (9a-e)$$

ここで、

$$p(r, \theta) = \begin{cases} q & [0 < r < d \text{ 且つ } 0 \leq \theta < \omega, 2\pi - \omega < \theta \leq 2\pi] \\ 0 & [\text{上記以外の場合}] \end{cases} \quad (10)$$

$p(r, \theta)$ は、次式の様に Fourier-Bessel 展開されたとする。

$$p(r, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} e_{ms} \cos m\theta J_m(\alpha_{ms}r) \quad (11)$$

ここで、

$$e_{ms} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^a p(r, \theta) \cos m\theta r J_m(\alpha_{ms}r) d\theta dr}{\int_0^{2\pi} \cos^2 m\theta d\theta \int_0^a r J_m^2(\alpha_{ms}r) dr} \quad (12)$$

式(1a-c)から得られる特殊解の応力成分に厚板の境界条件(7a-c)および(8a-c)を課して、未定定数を定め、合応力 T_{rr} 、変位 u_z, u_{θ} 、合モーメント M_r に境界条件(9a-e)を課して、同次解の未定定数を定め、コンピューターにかけて計算をする。

4. あとがき

厚板理論により、横等方性円形厚板の非軸対称曲げを解析した。厚板理論による解析は、境界条件が近似的になるので、応力場がどの程度の精確性があるかを明確にしなければならない。今後、3次元弾性論による解析との比較検討をしてみたいと思う。

計算結果については、講演会当日に発表する。