

I-A37 非軸対称変形をする円形厚板の非定常熱曲げ解析

北見工業大学大学院 学生員 何 耀昌
北見工業大学 フェロー 奥村 勇

1. まえがき 厚板の表面に外力が作用する時の曲げの解析方法は、従来用いられている3次元弾性論による解析と厚板理論による解析との2通りの方法がある。3次元弾性論による解析は、精確性の最も高い解析方法であるが、数値計算に難点がある。この難点が、3次元弾性論による解析上の複雑さ以上に、その適用性に大きな制約をもたらす。一方、厚板理論による解析は、近似的方法ではあるが、解析方法及び数値計算が容易になり、その適用性は相当に広い。しかしながら、厚板理論は、従来、部分等分布荷重、全面等分布荷重或いは集中荷重などの表面荷重を受ける厚板の曲げに適用されており、温度荷重或いは熱荷重を受ける厚板の曲げに対する応用は、現時点でも、あまり多くはない。また、厚板の形状の違いにより、その解析に難易が生ずる。現時点まで行われた研究の多くは、長方形厚板に関する研究であり、扇形厚板、円形厚板、円環厚板或いは楕円形厚板の非軸対称熱曲げに関する研究は、あまり見受けられない。本研究においては、厚板の形状を円形にして、厚板理論による解析を行う。解析は、温度場の解析と応力場の解析との2つに分かれる。温度場は、非定常状態を考えているので、熱曲げとしては、非定常熱曲げになる。温度場の解析は、3次元熱伝導論により厳密に解析する。応力場の解析には、同次解として、平面応力解、一般化平面応力解および逆対称応力解の3つの解を用い、特殊解として、熱を考慮した3次元弾性解を用いる。

2. 温度場の解析 円形厚板の座標系を図-1の様に定める。円柱座標 (r, θ, z) を用い、その原点を厚板の中央面の中心に置く。熱伝導の方程式は、次式で表される。

$$\nabla^2 T = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1)$$

ここで、 T, t および κ は、それぞれ、温度、時刻および温度伝導率を表す。また、 ∇^2 は円柱座標における Laplace の演算子である。式(1)を解くと、解析に必要な解は、次式となる。

$$\begin{aligned} T(r, \theta, z, t) = & \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \cos m\theta J_m(\alpha_{ms}r) \left\{ \left(G_{ms}^{(1)} \cosh \alpha_{ms}z \right. \right. \\ & + R_{ms}^{(1)} \sinh \alpha_{ms}z \Big) + \sum_{k=1}^{\infty} \left[T_{msk}^{(1)} \cos q_k z e^{-\kappa(\alpha_{ms}^2 + q_k^2)t} \right. \\ & \left. \left. + S_{msk}^{(1)} \sin p_k z e^{-\kappa(\alpha_{ms}^2 + p_k^2)t} \right] \right\} \quad (2) \end{aligned}$$

境界条件として、板の上面に部分扇形加熱を受け、下面に置いて熱放散、側面に置いて温度0の場合を考えると、境界条件は、次式となる。

$$\begin{aligned} r=a \quad & \text{において,} \quad T=0 \\ z=c/2 \quad & \text{において,} \quad \partial T / \partial z + hT = Q(r, \theta) / \lambda \\ z=-c/2 \quad & \text{において,} \quad \partial T / \partial z - hT = 0 \end{aligned} \quad (3a-c)$$

ここで、 h および λ は、それぞれ、相対熱伝達率および熱伝

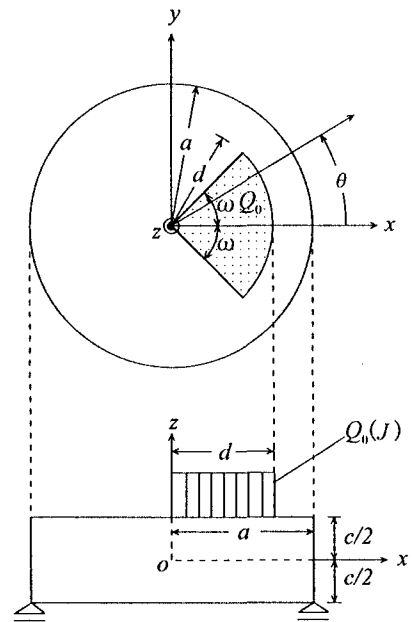


図-1 熱荷重を受ける円形厚板

キーワード：熱弾性、非軸対称、非定常熱曲げ、円形厚板、厚板理論

連絡先：〒090-8507 北見市公園町 165 番地 構造力学研究室 Tel 0157-26-9515 Fax 0157-23-9408

導率を表し、 $Q(r, \theta)$ は、板の上面における加熱を表す。また、初期条件として、次式を考える。

$$t = 0 \text{ において, } T = 0 \quad (4)$$

上述した境界条件を式（2）に課すると、温度は、次の様に定められる。

$$T(r, \theta, z, t) = \frac{1}{2\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} e_{ms} \cos m\theta J_m(\alpha_{ms}r) \left\{ \frac{\cosh \alpha_{ms}z}{\Omega_{ms}} + \frac{\sinh \alpha_{ms}z}{\Gamma_{ms}} - 2 \sum_{k=1}^{\infty} [U_{msk} \cos q_k z e^{-\kappa(\alpha_{ms}^2 + q_k^2)t} - V_{msk} \sin p_k z e^{-\kappa(\alpha_{ms}^2 + p_k^2)t}] \right\} \quad (5)$$

$$\text{ここで, } \alpha_{ms} = \frac{\lambda_{ms}}{a}, \quad \zeta_{ms} = \frac{\alpha_{ms}c}{2}, \quad \Omega_{ms} = \alpha_{ms} \sinh \zeta_{ms} + h \cosh \zeta_{ms}, \quad \Gamma_{ms} = \alpha_{ms} \cosh \zeta_{ms} + h \sinh \zeta_{ms}$$

$$U_{msk} = \frac{q_k}{\alpha_{ms}^2 + q_k^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{hc}{2}\right) \sin \frac{q_k c}{2} + \frac{q_k c}{2} \cos \frac{q_k c}{2}}, \quad V_{msk} = \frac{p_k}{\alpha_{ms}^2 + p_k^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{hc}{2}\right) \cos \frac{p_k c}{2} - \frac{p_k c}{2} \sin \frac{p_k c}{2}}$$

$$q_k \sin \frac{q_k c}{2} - h \cos \frac{q_k c}{2} = 0, \quad p_k \cos \frac{p_k c}{2} + h \sin \frac{p_k c}{2} = 0 \quad (6a-h)$$

3. 応力場の解析 応力場の解析には、同次解として、厚板の平面応力解、一般化平面応力解および逆対称応力解の3つの解を用い、特殊解として、熱を考慮した3次元弾性解を用いる。

円形厚板の力学的境界条件は、周辺に置いて、単純支持とすると、次式となる。

$$r = a \text{ において, } T_{rr} = 0, \quad (u_{\theta})_{z=0} = 0, \quad u_z = 0, \quad M_r = 0, \quad (\partial u_{\theta} / \partial z)_{z=0} = 0 \quad (7a-e)$$

$$z = c/2 \text{ において, } \sigma_{zr} = 0, \quad \sigma_{z\theta} = 0, \quad \sigma_{zz} = 0 \quad (8a-c)$$

$$z = -c/2 \text{ において, } \sigma_{zr} = 0, \quad \sigma_{z\theta} = 0, \quad \sigma_{zz} = 0 \quad (9a-c)$$

熱を考慮した3次元弾性解は、次の様に表される。

$$2Gu_r = \frac{\partial}{\partial r} \left[\phi_0 + r \frac{\partial \phi_1}{\partial r} + z \frac{\partial \phi_3}{\partial z} - 4(1-\nu)\phi_1 \right] + \frac{2}{r} \frac{\partial \psi_3}{\partial \theta} + \frac{\partial \chi}{\partial r} \quad (10a)$$

$$2Gu_{\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\phi_0 + r \frac{\partial \phi_1}{\partial r} + z \frac{\partial \phi_3}{\partial z} - 4(1-\nu)\phi_1 \right] - 2 \frac{\partial \psi_3}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial \theta} \quad (10b)$$

$$2Gu_z = \frac{\partial}{\partial z} \left[\phi_0 + r \frac{\partial \phi_1}{\partial r} + z \frac{\partial \phi_3}{\partial z} - 4(1-\nu)\phi_3 \right] + \frac{\partial \chi}{\partial z} \quad (10c)$$

式(10a-c)から得られる特殊解の応力成分に厚板の境界条件(8a-c)および(9a-c)を課して、未定定数を定め、更に、合応力 T_{rr} 、変位 u_{θ} 、 u_z および合モーメント M_r に厚板の境界条件(7a-e)を課すると、同次解の $P_m^{(1)}$ および $P_m^{(3)}$ に関する2元連立1次方程式と $Q_m^{(1)}$ 、 $Q_m^{(3)}$ および $E_m^{(1)}$ に関する3元連立1次方程式との独立な2組の連立1次方程式が得られ、それらを解くと、未定定数が定められる。

4. あとがき 上述した厚板理論による解析を通して、本研究における境界条件においては、温度場における円柱関数の助変数を応力場に置いてそのまま用いることができ、応力場の解析が極めて容易になることがわかる。厚板理論による解析は、境界条件が近似的になるので、その結果の精確性を検証するために、応力場の結果を厳密な3次元弾性論による結果と比較検討する必要がある。近似解析法である厚板理論の精確性を検証できれば、厚板の熱曲げに対する一つの簡明な解析方法を提案することにつながり、本研究の意義は高いと考えられる。

数値計算の結果については、講演会当日に報告する。