I－A36　物体力を伴う円柱直交異方性体の３次元弾性解について

北見工業大学　フェロー　奥村　勇

１．まえがき　異方性体の弾性理論に関する研究は、古くから行われており、最近では、異方性体に関する専門書も見受けられる。然しながら、横等方性体及び直交異方性体を除くと、異方性体に関する３次元弾性解は、殆ど見出されていない。特に、円柱異方性体及びそれを特殊化した円柱直交異方性体の一般的な３次元弾性解は、変位ポテンシャルが半径方向と周方向とで連成するという難しさから、現時点においても、発見されていない様である。円柱直交異方性体においても、軸対称解は、比較的容易に求められ、熱弾性ポテンシャルとして、既に発表している。

本研究は、物体力を含む円柱直交異方性体の３次元非軸対称解を求めるものである。３つの変位ポテンシャルを用いて解を誘導しているが、最後に到達した２元連立偏微分方程式の連成が解けないままで終っている。その方程式を横等方性体及び等方性体に特殊化すると、微分方程式の連成が解け、物体力を含む横等方性体及び等方性体の厳密な３次元非軸対称解が得られる。

２．応力―ひずみ関係　r，θ及びz軸が３つの弾性対称軸に平行に取られた円柱座標$(r,\ \theta,\ z)$を用いると、円柱直交異方性体の応力―ひずみ関係は、次式で表さられる。

$$\begin{Bmatrix}\sigma_{rr}\\ \sigma_{\theta\theta}\\ \sigma_{zz}\\ \sigma_{\theta z}\\ \sigma_{zr}\\ \sigma_{r\theta}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}c_{11}&c_{12}&c_{13}&0&0&0\\ c_{12}&c_{22}&c_{23}&0&0&0\\ c_{13}&c_{23}&c_{33}&0&0&0\\ 0&0&0&c_{44}&0&0\\ 0&0&0&0&c_{55}&0\\ 0&0&0&0&0&c_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_{rr}\\ \varepsilon_{\theta\theta}\\ \varepsilon_{zz}\\ 2\varepsilon_{\theta z}\\ 2\varepsilon_{zr}\\ 2\varepsilon_{r\theta}\end{Bmatrix} \tag{1}$$

ここで、σ_{ij}、ε_{ij}及びc_{ij}は、それぞれ、応力成分、ひずみ成分及び弾性定数を表す。

３．変位の方程式　式(1)の応力－ひずみ関係を応力のつり合い方程式に代入し、ひずみ－変位関係を用いると、変位のつり合い方程式が次の様に得られる。

$$c_{11}\left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r}\right)+c_{66}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_r}{\partial\theta^2}+c_{55}\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2}-c_{22}\frac{u_r}{r^2}+(c_{12}+c_{66})\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r\partial\theta}-(c_{22}+c_{66})\frac{1}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}$$

$$+(c_{13}+c_{55})\frac{\partial^2 u_z}{\partial r\partial z}+(c_{13}-c_{23})\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial z}+b_r=0 \tag{2a}$$

$$c_{66}\left(\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right)+c_{22}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial\theta^2}+c_{44}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2}-c_{66}\frac{u_\theta}{r^2}+(c_{66}+c_{12})\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u_r}{\partial r\partial\theta}+(c_{66}+c_{22})\frac{1}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}$$

$$+(c_{23}+c_{44})\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u_z}{\partial\theta\partial z}+b_\theta=0 \tag{2b}$$

$$c_{55}\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)+c_{44}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_z}{\partial\theta^2}+c_{33}\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}+(c_{13}+c_{55})\frac{\partial^2 u_r}{\partial r\partial z}+(c_{23}+c_{55})\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial z}$$

$$+(c_{23}+c_{44})\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial\theta\partial z}+b_z=0 \tag{2c}$$

ここで、u_r，u_θ及びu_z及びb_r，b_θ及びb_zは、それぞれ、変位成分及び物体力を表す。

４．変位ポテンシャルによる表示　いま、変位成分を変位ポテンシャルϕ，ψ_1及びψ_2によって、次の様に表す。

キーワード　弾性，異方性，円柱直交異方性，３次元解，非軸対称問題.

連絡先　〒090-8507　北見市公園町１６５番地，TEL. (0157)26-9472，FAX. (0157)23-9408.

$$u_r=\frac{\partial\phi}{\partial r},\quad u_\theta=j\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi_1}{\partial\theta},\quad u_z=k\frac{\partial\phi}{\partial z}+\frac{\partial\psi_2}{\partial z}\tag{3a–c}$$

ここで、j 及び k は、後に定める任意定数を表す。物体力 b_θ 及び b_z を $b_\theta=(1/r)\,\partial b_\theta^*/\partial\theta$, $b_z=\partial b_z^*/\partial z$ と置き、式(3a-c)を式(2a-c)に代入すると、変位ポテンシャルの支配方程式が次の様に得られる。

$$\begin{aligned}&c_{11}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}+\frac{c_{66}+j(c_{12}+c_{66})}{c_{11}}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}+\frac{c_{55}+k(c_{13}+c_{55})}{c_{11}}\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}+\frac{c_{12}+c_{66}}{c_{11}}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial\theta^2}\right.\\&\left.+\frac{c_{13}+c_{55}}{c_{11}}\frac{\partial^2\psi_2}{\partial z^2}\right]+\frac{1}{r}\left\{(c_{11}-c_{22})\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}+\left[2c_{66}+j(c_{12}-c_{22})\right]\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}+k(c_{13}-c_{23})\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right.\\&\left.+(c_{12}-c_{22})\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial\theta^2}+(c_{13}-c_{23})\frac{\partial^2\psi_2}{\partial z^2}\right\}+b_r=0\end{aligned}\tag{4a}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}+\frac{c_{22}j}{c_{66}j+c_{66}+c_{12}}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}+\frac{c_{44}j+k(c_{23}+c_{44})}{c_{66}j+c_{66}+c_{12}}\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}+\frac{1}{c_{66}j+c_{66}+c_{12}}\left[(c_{22}-c_{12}-2c_{66}j)\frac{1}{r}\right.\\&\left.\times\frac{\partial\phi}{\partial r}+c_{66}\left(\frac{\partial^2\psi_1}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi_1}{\partial r}\right)+c_{22}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial\theta^2}+c_{44}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial z^2}+(c_{23}+c_{44})\frac{\partial^2\psi_2}{\partial z^2}+b_\theta^*\right]=0\end{aligned}\tag{4b}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}+\frac{c_{44}k+j(c_{44}+c_{23})}{c_{55}k+c_{13}+c_{55}}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}+\frac{c_{33}k}{c_{55}k+c_{13}+c_{55}}\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}+\frac{1}{c_{55}k+c_{13}+c_{55}}\left[(c_{23}-c_{13})\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}\right.\\&\left.+c_{55}\left(\frac{\partial^2\psi_2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi_2}{\partial r}\right)+c_{44}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi_2}{\partial\theta^2}+c_{33}\frac{\partial^2\psi_2}{\partial z^2}+(c_{23}+c_{44})\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial\theta^2}+b_z^*\right]=0\end{aligned}\tag{4c}$$

いま、任意定数 k 及び j を

$$k=\frac{c_{11}\nu-c_{55}}{c_{13}+c_{55}},\quad j=\frac{c_{11}\mu-c_{66}}{c_{12}+c_{66}},\quad \frac{c_{33}k}{c_{55}k+c_{13}+c_{55}}=\nu,\quad \frac{c_{44}k+j(c_{44}+c_{23})}{c_{55}k+c_{13}+c_{55}}=\mu\tag{5a–d}$$

と置き、式(4a-c)を変形すると、次式となる。

$$(4+rL_1)L_3\Psi'-\frac{4c_{44}}{c_{66}}\frac{\partial^2\Psi'}{\partial z^2}-\left[2\left(\frac{c_{22}}{c_{66}}-\alpha\right)+\alpha\beta\right]\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Psi'}{\partial\theta^2}+\frac{2(c_{13}-c_{23})}{c_{13}+c_{55}}\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi'}{\partial r}=\left(\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}+L_3\right)(rF_1)\tag{6a}$$

$$(2+\beta+rL_1)L_2\Psi'-\left[\frac{2c_{33}}{c_{55}}-\gamma(2+\beta)\right]\frac{\partial^2\Psi'}{\partial z^2}=\beta F_2+L_2(rF_1)\tag{6b}$$

ここで、α，β 及び γ は、弾性定数から成る係数、F_1 及び F_2 は、ϕ と物体力とから成る複雑な関数を表し、更に、

$$\Psi'=r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi_1}{\partial r}\right)+\left(\frac{c_{22}}{c_{66}}-\alpha\right)\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial\theta^2}+\frac{c_{44}}{c_{66}}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial z^2},\quad L_1=\frac{\partial}{\partial r}+\frac{c_{13}-c_{23}}{c_{13}+c_{55}}\frac{1}{r}\tag{7a,b}$$

$$L_2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{c_{44}}{c_{55}}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\left(\frac{c_{33}}{c_{55}}-\gamma\right)\frac{\partial^2}{\partial z^2},\quad L_3=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\left(\frac{c_{22}}{c_{66}}-\alpha\right)\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{c_{44}}{c_{66}}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\tag{7c,d}$$

式(6a,b)は、Ψ' と ϕ とに関する２元連立偏微分方程式であるが、その連成を解くのは、極めて困難な様である。

５．あとがき　式(6a,b)の連成を解くことは、色々な視点から試みてみたが、現時点において成功していない。式(6a,b)を軸対称問題に限定すると、連成が解け、解が得られる。また、式(6a,b)を横等方性体及び等方性体に特殊化した時にも、連成が解け、物体力を伴う横等方性体及び等方性体の厳密な３次元非軸対称解が得られる。更に、弾性定数の間に３つの関係式を課して、独立な弾性定数の数を６個とした場合（近似円柱直交異方性体と呼べるか）にも、連成が解けて解が得られる。