土木学会第54回年次学術講演会（平成11年9月）

I－A34　高次せん断変形理論に基づく積層板の変位ポテンシャル

大阪市立大学工学部　正会員　小林　治俊
川崎重工業（株）　正会員　田中　誠

1．はじめに

近年，複合材料力学の発展に伴い，面内・面外弾性係数比が大きく，面外せん断に敏感な積層板に対する高次せん断変形理論が多く提案されている．これにはMindlin により展開された一次せん断変形理論の改良版として板厚方向座標 z の高次べきによって変位を仮定するものが多い[1,2]．例えば，Reddy はたわみと回転角に関する式(1)の変位仮定と変分原理に基づく３次せん断変形理論を展開し，四辺単純支持板の解析を行うとともに[3]，これまでに提案された変位仮定もしくは応力仮定に基づくせん断変形理論の整理を行い，各層が横等方性からなる積層板のそれぞれのつり合い式について，Marguerre の方法により独立な二つの偏微分方程式を求めている[4]．本文では，ポテンシャル関数を用いて釣り合い式を解く方法を示すとともにLevy 解を導いた．

2．変位ポテンシャル

Reddy 理論における変位仮定は，座標 (x, y, z) 方向に対して次のように与えるものである．

$$u_1=u+z\left[\psi_x-\frac{4}{3}\left(\frac{z}{h}\right)^2\left(\psi_x+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right],\quad u_2=v+z\left[\psi_y-\frac{4}{3}\left(\frac{z}{h}\right)^2\left(\psi_y+\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right],\quad u_3=w \tag{1}$$

この変位仮定に基づくとせん断修正係数の導入は不要であり，各層が横等方性よりなるカップリングの無い対称積層板のつり合い式は，二つの回転角 ψ_x, ψ_y とたわみ w によって以下のように表される[3,4]．

$$D\frac{\partial^2\psi_x}{\partial x^2}+C\frac{\partial^2\psi_x}{\partial y^2}-A\left(\psi_x+\frac{\partial w}{\partial x}\right)+(D-C)\frac{\partial^2\psi_y}{\partial x\partial y}-F\nabla^2\frac{\partial w}{\partial x}=m_3\frac{\partial^2\psi_x}{\partial t^2}-m_5\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

$$D\frac{\partial^2\psi_y}{\partial y^2}+C\frac{\partial^2\psi_y}{\partial x^2}-A\left(\psi_y+\frac{\partial w}{\partial y}\right)+(D-C)\frac{\partial^2\psi_x}{\partial x\partial y}-F\nabla^2\frac{\partial w}{\partial y}=m_3\frac{\partial^2\psi_y}{\partial t^2}-m_5\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

$$\begin{aligned}(F\nabla^2+A)\left(\frac{\partial\psi_x}{\partial x}+\frac{\partial\psi_y}{\partial y}\right)-(H\nabla^2\nabla^2-A\nabla^2)w+N_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+N_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+P_z\\ =m_5\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial\psi_x}{\partial x}+\frac{\partial\psi_y}{\partial y}\right)-\left(m_7\nabla^2-m_1\right)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\end{aligned} \tag{2}$$

上式で (N_x, N_y), P_z はそれぞれ面内力と面外荷重，また $\nabla^2(=\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2)$ はラプラスの演算子，そして $A\sim H$，$m_1\sim m_7$ は板剛性および回転慣性に関連する諸量である．例として，A, D, m_3 の具体式を示すと

$$A=\sum_{k=1}^{N}(G_z)_k\left[(z_k-z_{k+1})-\frac{8}{3h^2}(z_k^3-z_{k+1}^3)+\frac{1}{5}\left(\frac{4}{3h^2}\right)^2(z_k^5-z_{k+1}^5)\right]$$

$$D=\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{E}{1-\nu^2}\right)_k\left[\frac{1}{3}(z_k^3-z_{k+1}^3)-\frac{1}{5}\left(\frac{8}{3h^2}\right)(z_k^5-z_{k+1}^5)+\frac{1}{7}\left(\frac{4}{3h^2}\right)^2(z_k^7-z_{k+1}^7)\right]$$

$$m_3=\sum_{k=1}^{N}(\rho)_k\left[\frac{1}{3}(z_k^3-z_{k+1}^3)-\frac{1}{5}\left(\frac{8}{3h^2}\right)(z_k^5-z_{k+1}^5)+\frac{1}{7}\left(\frac{4}{3h^2}\right)^2(z_k^7-z_{k+1}^7)\right] \tag{3}$$

である．ただし，E, ν：面内ヤング係数，ポアソン比，G_z：面外せん断弾性係数，ρ：密度，h：板厚である．

式(2)を解くにあたり，回転角 ψ_x, ψ_y と次の関係にある二つのポテンシャル関数 ϕ, ψ を導入する．

$$\psi_x=\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad \psi_y=\frac{\partial\phi}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{4}$$

これを，つり合いの式(2a), (2b)に代入すると次式を得る．

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}=0,\quad -\frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}=0 \tag{5}$$

ただし関数f, g の内容は，

$$f=\left(C\nabla^2-A-m_3\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi,\quad g=\left(D\nabla^2-A-m_3\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi-\left(F\nabla^2+A-m_5\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)w \tag{6}$$

であり，式(5)を満足するf, g は一般性を失うことなく，

$$f=g=0 \tag{7}$$

に置くことが出来る．したがって，式(6)よりψ に関して独立な２階の偏微分方程式

$$(C\nabla^2-A)\,\psi=m_3\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \tag{8}$$

キーワード：積層板，高次せん断変形理論，変位ポテンシャル
連絡先：小林治俊，〒558-8585大阪市住吉区杉本3-3-138，工学部土木工学科，Tel(06)6605-2173　Fax (06)6605-2723

およびϕとwに関する次の関係式を得る．

$$\left(D\nabla^2-A-m_3\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi-\left(F\nabla^2+A-m_5\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)w=0 \tag{9}$$

次に式(4)をつり合いの式(2c)に代入すれば，ϕとwに関する別の関係式

$$\left(F\nabla^2\nabla^2+A\nabla^2-m_5\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi-\left(H\nabla^2\nabla^2-A\nabla^2\right)w+\left(m_7\nabla^2-m_1\right)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+N_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+N_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+P_z=0 \tag{10}$$

を得る．式(9), (10)の連立偏微分方程を解くために，ϕとwに次の関係にあるポテンシャル関数Φを導入する．

$$\phi=\left(F\nabla^2+A-m_5\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Phi,\qquad w=\left(D\nabla^2-A-m_3\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Phi \tag{11}$$

これによって，式(9)は恒等的に満足するので，式(10)に代入することによりΦに関する独立な偏微分方程式

$$\begin{aligned}&\nabla^2\nabla^2\left[\left(F^2-HD\right)\nabla^2+A\left(2F+H+D\right)\right]\Phi+\left(N_x\frac{\partial^2}{\partial x^2}+N_y\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(D\nabla^2-A-m_3\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Phi+P_z\\&=-\left[\left(m_1H-2m_5F+m_7D\right)\nabla^2\nabla^2-\left(m_1D+m_3A+2m_5A+m_7A\right)\nabla^2+m_1A\right]\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}-\left[\left(m_5^2-m_3m_7\right)\nabla^2+m_1m_3\right]\frac{\partial^4\Phi}{\partial t^4}\end{aligned} \tag{12}$$

を得る．以上により，つり合いの式(2)の解は，ψとΦに関する二つの独立した偏微分方程式(8)および(12)を解く問題に帰着された．ψとΦが決定すれば，たわみ，回転角は次式により求められる．

$$\psi_x=\frac{\partial}{\partial x}\left(F\nabla^2+A-m_5\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Phi+\frac{\partial\psi}{\partial y},\qquad \psi_y=\frac{\partial}{\partial y}\left(F\nabla^2+A-m_5\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Phi-\frac{\partial\psi}{\partial x},\qquad w=\left(D\nabla^2-A-m_3\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Phi \tag{13}$$

3．Levy解

平面寸法$(a\times b)$の矩形板が相対二辺$(x=0,\ a)$で単純支持された場合の単級数解として次のように置く．

$$\psi(x,y)=\psi(y)\cos\alpha x\exp(\mathrm{i}\omega t),\quad \Phi(x,y)=\Phi(y)\sin\alpha x\exp(\mathrm{i}\omega t) \tag{14}$$

ただし，$\alpha=n\pi/a\ (n=1, 2, 3,\ldots)$，$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$，$\omega$は円振動数である．まず式(14a)を式(8)に代入すれば，

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}y^2}-\left(\alpha^2+\frac{A-m_3\omega^2}{C}\right)\psi=0 \tag{15}$$

が得られ，この解はA_1，A_2を積分定数，また$C\alpha^2+A>m_3\omega^2$として次式で与えられる．

$$\psi(y)=A_1\sinh\lambda y+A_2\cosh\lambda y\qquad\left(\lambda=\sqrt{\left(C\alpha^2+A-m_3\omega^2\right)/C}\right) \tag{16}$$

次に，式(14b)を式(12)に代入すれば，$\Phi(y)$に関する微分方程式

$$c_1\frac{\mathrm{d}^6\Phi}{\mathrm{d}y^6}+c_2\frac{\mathrm{d}^4\Phi}{\mathrm{d}y^4}+c_3\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}y^2}+c_4\Phi=-p_m \tag{17}$$

が求められる．ここにp_mは外荷重のフーリエ展開係数であり，各係数$c\sim c_4$の内容は以下のように与えられる．

$$\begin{aligned}&c_1=F^2-HD,\qquad c_2=-3\alpha^2\left(F^2-HD\right)+AD+N_yD-\omega^2\left(m_3H-2m_5F+m_7D\right),\\&c_3=3\alpha^4\left(F^2-HD\right)-2\alpha^2AD-N_y\left(\alpha^2D+A-m_3\omega^2\right)-N_x\alpha^2D\\&\quad+\omega^4\left(m_5^2-m_3m_7\right)+\omega^2\left[2\alpha^2\left(m_3H-2m_5F+m_7D\right)+\left(m_3A+m_1D\right)\right],\\&c_4=-\alpha^6\left(F^2-HD\right)+\alpha^4AD+N_x\alpha^2\left(\alpha^2D+A-m_3\omega^2\right)-\omega^4\left[\alpha^2\left(m_5^2-m_3m_7\right)-m_1m_3\right]\\&\quad-\omega^2\left[\alpha^4\left(m_3H-2m_5F+m_7D\right)+\alpha^2\left(m_3A+m_1D\right)+m_1A\right]\end{aligned} \tag{18}$$

式(17)の特解は，明らかに

$$\Phi_{\mathrm{p}}(y)=-p_m/c_4 \tag{19}$$

である．式(17)の同次方程式の特性方程式を求めると，

$$c_1S^6+c_2S^4+c_3S^2+c_4=0,\quad もしくは\quad c_1T^3+c_2T^2+c_3T+c_4=0\qquad\left(T=S^2\right) \tag{20}$$

であるから，3次方程式の根を$T_1, T_2, T_3>0$とすれば，同次解は次のように与えられる．$B_1\sim B_6$は積分定数．

$$\Phi_{\mathrm{h}}(y)=B_1\cosh\tau_1y+B_2\sinh\tau_1y+B_3\cosh\tau_2y+B_4\sinh\tau_2y+B_5\cosh\tau_3y+B_6\sinh\tau_3y\qquad\left[\tau_i=\sqrt{T_i}\ \ (i=1\sim3)\right] \tag{21}$$

4．おわりに

3次せん断変形理論に基づく積層板のつり合い式をポテンシャル関数により解く方法を示し，2階と6階の独立な二つの偏微分方程式を導き，そのLevy解を誘導した．これにより各種境界を持つ矩形板の解析が可能である．なお本法を文献[4]に示された各種せん断変形理論による積層板に適用した結果，式(8), (12)と類似の式を得た．

参考文献　[1] Reissner, E.: Reflections on the theory of elastic plates, J. Appl. Mech. Rev., **38**(1985)1453-1464. [2] Mallikarjuna and Kant, T.: A critical review and some results of recently developed refined theories of fiber-reinforced laminated composites and sandwiches, Composite Struct., **23**(1993)293-312. [3] Reddy, J.N.: A simple higher-order theory for laminated composite plates, J. Appl. Mech., **51**(1984)745-752. [4] Nosier, A. and Reddy, J.N.: Boundary layer and interior equations for higher-order theories of plates, ZAMM, **72**(1992)657-666.