

I-A33

異材接合問題のグリーン関数の誘導

静岡県 正会員 白井 幸雄
名古屋工業大学 正会員 長谷部 宣男

1. はじめに グリーン関数は、境界値問題の境界条件を **dislocation** や集中荷重が存在していて、満足している関数である。本報告では、異種材料接合問題のそれを扱う。ここでは、二つの材料が接合線に対称な形状である場合の解を誘導する。本報告で解析する問題は、接合部の境界とそれ以外の境界で、それぞれ境界条件が与えられる混合境界値問題であり、有理形写像関数と複素応力関数を用いて解析される。応力関数を求める式は、Riemann-Hilbert 問題に帰着され、複素応力関数の一般解が得られる。

2. 異種材料接合問題 図-1(a)に示されるような接合部に楕円孔を有す二つの異材半平面に q_{xI} 、 q_{yI} で表される集中荷重が作用する場合の一般解を求める。この問題を考えるにあたり、接合部に楕円孔を有す二つの異材半平面と集中荷重を同時に考えることはこの一般解を得ることにおいて大変困難である。そこで重ねあわせの方法を用いることにより図-1(a)に示される問題Aを図-1(b)、図-1(c)の2つの特別な問題に置き換え考える。図-1(b)で示される問題Bは、半楕円切欠きを有す半平面に集中荷重が働く場合。そして、図-1(c)で示される問題Cは、接合部に楕円孔を有する二つの異材半平面が存在する問題である。問題Bは境界上が全て自由境界（外力=0）である外力境界値問題として解く[1]。一方、問題Cは非接合部では自由境界、接合部では変位、応力が等しいとした混合境界値問題として解く[2]。最終的に、これら2つの解を重ねあわせることにより、図-1(a)に示される条件での一般解を誘導する。

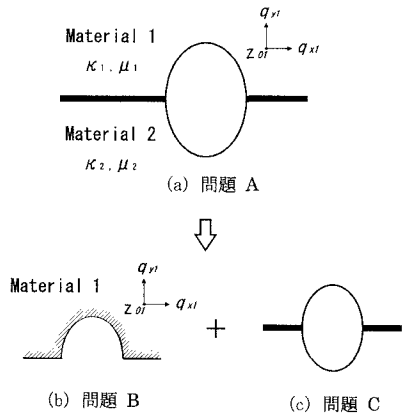


図-1

問題Cを解くにあたり図-2(a)の問題を考える。図-2(b)ように材料IをX軸に関して反転させることにより図-2(b)から図-2(c)へ写像する写像関数として、材料I、IIで同じ写像関数を用いることができる。写像関数として次式を用いる。

$$z_I = \omega(t_I) = \frac{E_o}{I - t_I} + \sum_{k=1}^N \frac{E_k}{\zeta_k - t_I} + E_c \quad (1)$$

また、材料I、IIの形状が等しいため、接合面上（境界M）に対応する単位円上の点が材料I、IIで同一の変数 σ ($=t_I=t_2$) で表わせる。この関係より境界Mでの境界条件式が一つの変数 σ の関数として表わすことができる。境界条件をまとめると次式となる。

$$\left. \begin{array}{ll} \text{外力 } p_{yI} = p_{xI} = 0 & \text{on } L_1 \\ \text{外力 } p_{y2} = p_{x2} = 0 & \text{on } L_2 \\ \text{外力 } p_{xI} = p_{x2} & \text{on } M \\ -p_{yI} = p_{y2} & \end{array} \right\} \quad \begin{array}{ll} \text{変位 } -v_I = v_2 & \text{on } M \\ u_I = u_2 & \end{array} \quad (2)$$

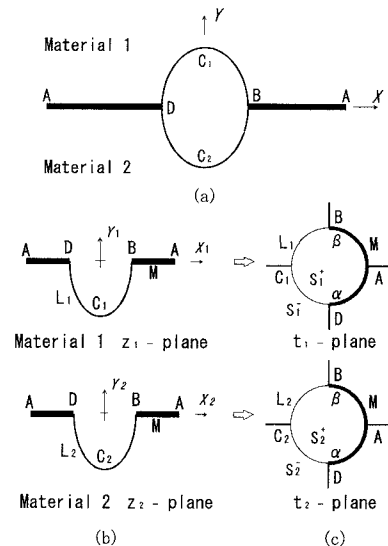


図-2

キーワード グリーン関数、写像関数、集中荷重、異材接合、Riemann-Hilbert 問題
連絡先 (名古屋市昭和区御器所町 名古屋工業大学 社会開発工学科 Tel, 052-735-5482)

そして、集中荷重の存在する材料 I の応力関数 $\phi_i(t_i)$ を次式のように表現する。

$$\phi_i(t_i) = \phi_{iA}(t_i) + \phi_{qi}(t_i) \quad (3)$$

ここで、 $\phi_{qi}(t_i)$ は問題 B より得られる集中荷重による関数である。この関数を重ねあわせ、全体として上式 $\phi_i(t_i)$ が式(2)の境界条件を満足するように $\phi_{iA}(t_i)$ を決める。 $\phi_{iA}(t_i)$ として次式を得る。

$$\begin{aligned} \phi_{iA}(t_i) = & -\frac{I}{1+\mu} \sum_{k=1}^N \left[I + \mu \frac{\chi_i(t_i)}{\chi_i(\zeta_k)} \right] \frac{\overline{A_{ik}} B_k}{\zeta_k - t_i} + \frac{I}{1+\mu} \sum_{k=1}^N \left[I - \frac{\chi_i(t_i)}{\chi_i(\zeta'_k)} \right] \frac{\overline{A_{2k}} B_k \zeta_k'^2}{\zeta'_k - t_i} \\ & - \frac{\mu}{2\pi(1+\mu)} \left[\kappa_i q_i F_i(t_i) + q_i F_2(t_i) - \overline{q_i} G_i(t_i) + 2\pi G_2(t_i) \right] \end{aligned} \quad (4)$$

$$F_i(t_i) = \log(t_i - I/\overline{t_{0i}}) - \log(t_i - I) + \chi_i(t_i) \int_{t_{0i}}^I \frac{d\sigma}{\chi_i(\sigma)(\sigma - t_i)}, \quad F_2(t_i) = \log(t_i - t_{0i}) - \log(t_i - I) + \chi_i(t_i) \int_{t_{0i}}^I \frac{d\sigma}{\chi_i(\sigma)(\sigma - t_i)}$$

$$G_i(t_i) = \frac{\omega(t_{0i}) - \omega(I/\overline{t_{0i}})}{\omega'(t_{0i})} \left[I - \frac{\chi_i(t_i)}{\chi_i(I/\overline{t_{0i}})} \right] \frac{(I/\overline{t_{0i}})^2}{t_i - I/\overline{t_{0i}}} + \sum_{k=1}^N \left(\frac{I}{\zeta'_k - I} - \frac{I}{\zeta'_k - t_{0i}} \right) \left[I - \frac{\chi_i(t_i)}{\chi_i(\zeta_k)} \right] \frac{B_k}{t_i - \zeta_k}$$

$$G_2(t_i) = \sum_{k=1}^N \frac{\overline{A_{qik}} B_k}{t_i - \zeta_k} \left[I - \frac{\chi_i(t_i)}{\chi_i(\zeta_k)} \right]$$

ここで、 $\kappa_i = \begin{cases} (3-\nu_i)/(1+\nu_i) & (\text{一般化された平面応力状態}) \\ 3-4\nu_i & (\text{平面歪み状態}) \end{cases}$ 、 $\begin{cases} \nu_i & : \text{材料 I のポアソン比} \\ \nu_2 & : \text{材料 II のポアソン比} \end{cases}$
 $\begin{cases} \mu_i & : \text{材料 I のせん断弾性係数} \\ \mu_2 & : \text{材料 II のせん断弾性係数} \end{cases}$ 、 $\mu = \frac{\mu_2(\kappa_i + I)}{\mu_i(\kappa_2 + I)}$ 、 $q_i = -(q_{xi} + iq_{yi})/(I + \kappa_i)$ 、 $\overline{B_k} \equiv \overline{E_k}/\omega'(\zeta'_k)$

また、 t_{0i} は 図-1 中での集中荷重が働いている点 z_{0i} を t_1 -plane 上に写像した点を表わしている。複素定数 A_{ik} 、 A_{2k} は、次のようになる。

$$A_{ik} \equiv \phi'_{iA}(\zeta'_k) \quad (5)$$

$$A_{2k} \equiv \phi'_2(\zeta'_k) \quad (k=1, 2, \dots, N) \quad (6)$$

式(4)より $\phi_{iA}(t_i)$ が求まったので、これを式(3)に代入することにより複素応力関数 $\phi_i(t_i)$ が求まる ($\phi_2(t_2)$ の式省略)。

このグリーン関数の応用例として、接合部に半径 a の円孔が存在し、その接合端に剥離が生じている場合において、材料 I の対称軸上 (y 軸上) に集中荷重を働かせた状態での応力分布を示す。図-3 は、円孔の両側にクラックを有する場合であり、接合部付近以外での円孔上では、 σ_θ がマイナスになっており接線方向に対して圧縮の応力が働いている。クラック先端では応力集中が生じており、その近傍で σ_y がプラスで引張りとなっているので、ここで界面剥離が進展する可能性がある。

3. まとめ 異種材料接合問題のグリーン関数を誘導した。有理写像関数は一般形で与えられるので、ここで得られた解は、有理写像関数を用いた比較的任意形状に対する解とみなせる。このグリーン関数は境界要素法の基本解としても用いられる。

参考文献 [1] Norio Hasebe, Jun Qian and Yizhou Chen 1996, Fundamental solutions for half plane with an oblique edge crack, Engineering Analysis with Boundary Elements 17, 263-267

[2] Norio Hasebe, Mikiya Okumura and Takuji Nakamura, 1992, Bonded bi-material half-planes with semi-elliptical notch under tension along the interface, Journal of Applied Mechanics, ASME, 77-83

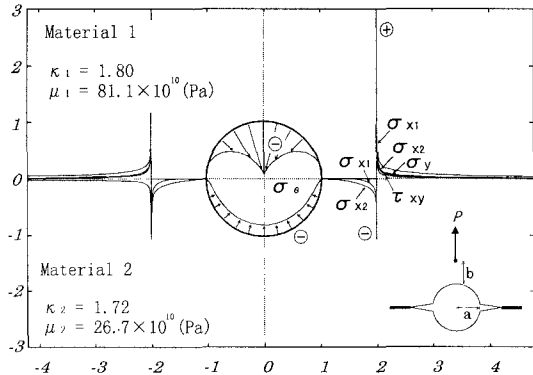


図-3 応力分布 (a / b = 1.0)