

I-A31 クラックによる多重散乱解析と弾性散乱断面積

東北大学 学生員 岸 典之
東北大学 正 員 北原道弘

1. はじめに

複数クラックによる多重散乱問題を境界積分方程式により定式化し、これをボルン級数的に解析することを試みる。評価対象とする物理量は、クラックによって散乱されたエネルギー総量をクラックの幾何学的断面積に換算表現した弾性散乱断面積である。クラック面を含む平面上にクラックが複数配置された場合とクラック面に平行にクラックが複数配置された場合について、散乱断面積の周波数特性を考察した。

2. 多重散乱問題のボルン級数解法

クラックの数が増えても定式化と解法の要点は同じであるため、ここでは2個のクラックによる多重散乱問題について考える。

クラック面上の開口変位に対する境界積分方程式は次のように定式化できる¹⁾。

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \end{Bmatrix} \quad (1)$$

ここで、 Δu_1 と Δu_2 は2つのクラック面 SC_1 と SC_2 上の開口変位、 K_{ij} はクラック面 SC_j からクラック面 SC_i への相互作用を表す影響マトリックス、 f_1 と f_2 はそれぞれクラック面 SC_1 と SC_2 上の入射波による応力である。

式(1)の影響マトリックス K を対角項成分 A と非対角項成分 B に次のように分離する。

$$(A - B) \Delta u = f \quad (2)$$

ここで、 A 、 B 、 Δu 、 f は次のようである。

$$A = \begin{bmatrix} K_{11} & 0 \\ 0 & K_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -K_{12} \\ -K_{21} & 0 \end{bmatrix} \\ \Delta u = \{\Delta u_1, \Delta u_2\}^T, \quad f = \{f_1, f_2\}^T \quad (3)$$

いま、式(2)は次のように書き換えることができる。

$$(I - A^{-1}B) \Delta u = A^{-1}f \quad (4)$$

ここで $\|C\| \equiv \|A^{-1}B\| < 1$ が成り立てば、上式(4)より解 Δu は次のように表現できる。

$$\Delta u = (I - C)^{-1}A^{-1}f = \sum_{k=0}^{\infty} C^k A^{-1}f \quad (5)$$

これが解 Δu のボルン級数表現である。この級数の第1項を Δu の第0次近似として Δu_0 とおくと、上式より第 n 次近似は次のようになる。

$$\Delta u_n = \Delta u_0 + C \Delta u_{n-1} = \sum_{k=0}^n C^k \Delta u_0 \quad (6)$$

また、ボルン級数の収束パラメータ E^n を次のように定義する。

$$E^n = \frac{\|C^n \Delta u_0\|}{\|\Delta u_n\|} \quad (7)$$

E^n は第 n 次ボルン級数近似での第 n 番目の項の寄与率を表しており、この E^n を級数の収束判定に用いる。

3. 散乱断面積

散乱断面積 $P(\omega)$ は、散乱波の時間平均パワーと入射波の時間平均インテンシティの比として定義される。便宜上、散乱パワーの放射特性を表す散乱微分断面積 $dP/d\Omega$ ($d\Omega$ は立体角)を次のように先に計算しておく都合がよい。

$$\frac{dP}{d\Omega} = |A_L|^2 + \frac{k_L}{k_T} (|A_T|^2 + |A_H|^2) \quad (8)$$

ここで、 A_L は縦波の散乱振幅、 A_T と A_H は横波の散乱振幅であり、これら散乱振幅は散乱波の積分表現を利用して計算できる。散乱断面積 $P(\omega)$ は微分断面積(8)を単位球面上で積分すれば求まる。

4. 解析結果

(1) クラックが水平配置された場合

水平に配置されたクラックモデルの一例を図-1に示す。クラックは全て半径 a の円形クラックであり、入射縦波がクラック面に鉛直な方向から入射している。また、母材のポアソン比は0.25である。

クラックの個数が増加した場合に散乱断面積の値がどのように変化するかを調べるために、クラックの個数を1, 2, 4, 9個と増加させたときの散乱断面積の値を無次元化縦波波数 ak_L に対して図示したものが図-2である。図-2において、(a)は1個、(b)はクラック間の間隔を $a/2$ とり2個配置、(c)は間隔を $a/2$ とり4個正方形に配置、(d)は間隔を $a/2$ とり9個格子状に配置した場合の結果である。水平配置された場合、散乱断面積(図中の四角)は、どの場合においてもほぼ同様の周波数特性を示すこと、また、 n 個のクラックに対する散乱断面積の値は、1個のクラックに対する散乱断面積の n 倍という関係が近似的に成立していることがわかる。

Key Words: 多重散乱問題, クラック, ボルン級数, 弾性散乱断面積

〒980-8579 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉06 TEL 022-217-7126 FAX 022-217-7127

さらに、縦波成分（図中の丸）と横波成分（三角）に着目すると、散乱断面積がピークとなる $ak_L = 1.2$ 付近では、クラックの個数が増えるにつれて縦波成分が増加し、横波成分は減少している。このことからクラック間の水平方向の相互干渉の影響は、系全体としての散乱エネルギー総量にはあまり影響しないが、散乱エネルギーの分担形態には影響していると言える。

(2) クラックが鉛直配置された場合

2個のクラックが間隔 $3a$ 離れて鉛直配置された場合の散乱断面積を図-3に示す。鉛直配置された場合には、散乱断面積の値は1個のクラックの値の整数倍という単純な関係は成立しておらず、散乱エネルギー総量を表す散乱断面積にも多重散乱の影響が表れている。

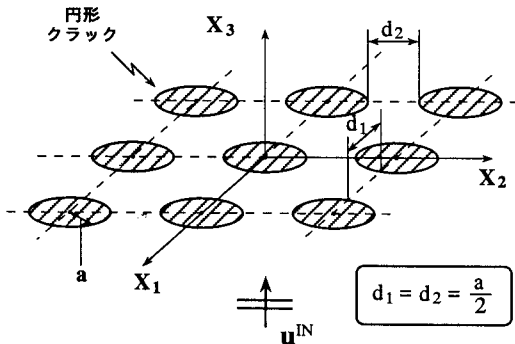


図-1 クラック配置の一例（9個格子状配置）

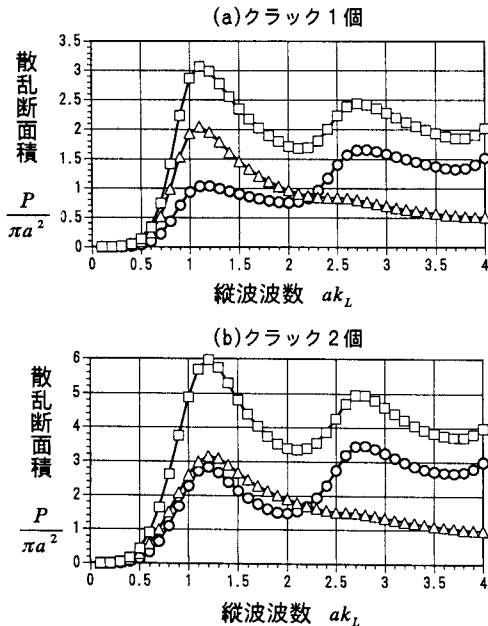


図-2 散乱断面積（水平配置）

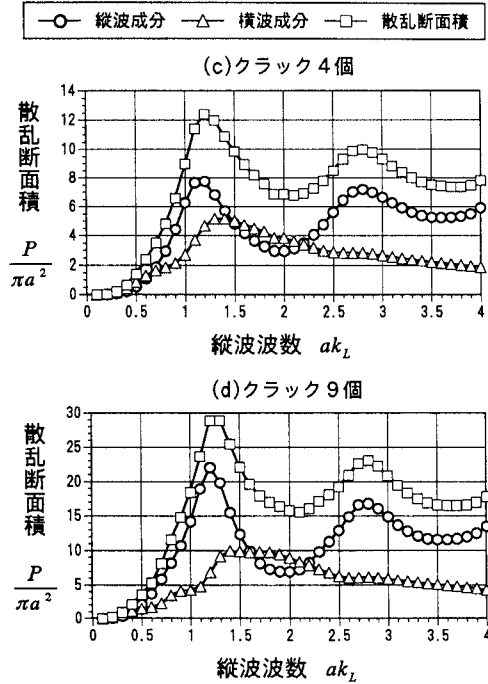


図-2 散乱断面積（水平配置）

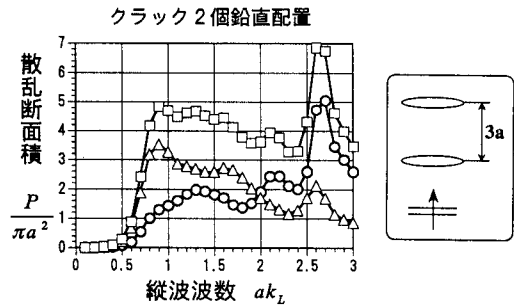


図-3 散乱断面積（鉛直配置）

5. 結論

クラックが水平配置された場合、 n 個のクラックに対する散乱断面積の値は、1個のクラックに対する散乱断面積のほぼ n 倍という関係が成立していることがわかった。ただし、散乱エネルギー総量に対する縦波成分と横波成分の分担割合は散乱断面積が最大値をとる波数付近ではかなり変化しており、多重散乱の影響は存在していることに注意を要する。また、クラックが鉛直配置された場合には、散乱断面積とクラック個数の間に単純な関係は成立せず、散乱断面積にも多重散乱の影響が表れていることがわかった。

参考文献

- 1) 岸典之, 岸部大蔵, 北原道弘: 欠陥による多重散乱解析法の開発, 第53回土木学会年講概要集, CS-185, pp.368-369, 1998.