

2次元領域の変形パターンシミュレーション

○ 東北大学 学生員 松井 和己
 東北大学 正会員 池田 清宏
 東北大学 正会員 寺田 賢二郎

1. はじめに

均質材料を用いた三軸圧縮試験やねじりせん断試験の供試体表面にはよく特徴的なせん断帯やパターンを観察することができる。これらのパターンの発生、変化に関して池田¹⁾らは群論的分岐理論に基づいた対称性の階層的崩壊によるものであると提唱している。そこで本研究は、周期境界を持つ長方形圧縮板の変形パターンを数値解析により求め、群論的分岐理論との整合性の確認することとする。

2. 長方形領域の代表的変形パターン

領域の境界の影響を除くために、長方形領域の両端には周期的な境界条件を付加し、滑らかにつながっていると仮定する。この場合の分岐構造を池田らが Fourier 級数項を用いて以下のように示している。

a) 主経路からの分岐解

主経路からは、以下の2種類のパターンの方向に分岐解が存在する。

Diamond Pattern ($DI_{n\tilde{n}}$)

$$w = A_{n\tilde{n}} \cos\left(\frac{2\pi nx}{L_x}\right) \cos\left(\frac{2\pi \tilde{n}y}{L_y}\right) \quad (1)$$

$$w = B_{n\tilde{n}} \sin\left(\frac{2\pi nx}{L_x}\right) \sin\left(\frac{2\pi \tilde{n}y}{L_y}\right) \quad (2)$$

Oblique Stripe Pattern ($OB_{n\tilde{n}}^{\pm}$)

$$w = A_{n\tilde{n}} \cos\left(2\pi\left(n\frac{x}{L_x} \pm \tilde{n}\frac{y}{L_y}\right)\right) \quad (3)$$

b) $OB_{n\tilde{n}}^{\pm}$ 不変経路からの分岐解

$OB_{n\tilde{n}}^{\pm}$ 不変経路からの分岐解には、以下の2種類の分岐経路が存在する。

Oblique Stripe Pattern ($OB_{m\tilde{m}}^{\pm}$)

$$w = \sum A_{m\tilde{m}} \cos\left(2\pi\left(m\frac{x}{L_x} \pm \tilde{m}\frac{y}{L_y}\right)\right) \quad (4)$$

ここで $m, \tilde{m}$ は $n/m = \tilde{n}/\tilde{m} \geq 2$ を満たす整数である。

Echelon Mode

$$w = \sum A_{m\tilde{m}} \cos\left(2\pi\left(m\frac{x}{L_x} \pm \tilde{m}\frac{y}{L_y}\right)\right) \quad (5)$$

ここで $m, \tilde{m}$ は $-n\tilde{m} \pm m\tilde{n} = kj$ (j は整数) を満たす整数である。すなわち、エシェロンモードは2次分岐

$$\begin{aligned} C_{\text{ovv}} \times \tilde{C}_{\text{ovv}} &\rightarrow OB_{n\tilde{n}}^{\pm} \rightarrow EC_{n\tilde{n}kl}^{\pm} \\ &\searrow OB_{m\tilde{m}}^{\pm} \rightarrow EC_{m\tilde{m}kl}^{\pm} \end{aligned}$$

の結果として発生する。

3. 解析方法

(1) 解析モデル

解析モデルは、 $q(x, y) = -kw$ の反力を受ける線形バネによって支持される、 $L_x \times L_y \times t$ の長方形板とする。この板に x 軸方向面内一軸に一様圧縮力 N が作用する場合を考える。

(2) ポテンシャル関数

このモデルに対するひずみの高次項まで考慮したポテンシャル関数は次のようになる。

$$\begin{aligned} U = & \frac{D}{2} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right. \\ & + 2(1-\nu) \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right\} \Big] dx dy \\ & + \frac{3D}{2t^2} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy \\ & + \frac{k}{2} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} w^2 dx dy \\ & - \frac{2\pi^2 D}{L_y^2} f \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx dy \end{aligned} \quad (6)$$

ここで、 E はヤング率、 ν はポアソン比、 D は曲げ剛性、 t は板厚である。また、荷重パラメータ f は無次元量とした。

$$f = \frac{L_y N}{4\pi^2 D} \quad (7)$$

(3) 2重 Fourier 級数による離散化

このモデルの z 方向の変位 $w(x, y)$ を2重フーリエ級数により離散化する。

$$\begin{aligned} w = & \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \left[A_{pq} \sin\left(\frac{2\pi px}{L_x}\right) \sin\left(\frac{2\pi py}{L_y}\right) \right. \\ & \left. B_{pq} \cos\left(\frac{2\pi px}{L_x}\right) \cos\left(\frac{2\pi py}{L_y}\right) \right] \end{aligned} \quad (8)$$

この離散化された変位を用いて式6のポテンシャル関数を表し、ポテンシャルエネルギー停留の原理により、釣り合い式、接線剛性行列の誘導を行う。この釣り合い式を Newton-Raphson 法により解き、荷重-変位関係を求める。

Key Words: 分岐, 有限変形, 周期境界, 変形の局所化
 東北大学工学部土木工学科

4. 解析結果

解析は、低次のモードが発生するケース1と、高次のモードのケース2について行った。ここでの荷重変位関係については、荷重パラメータ f と、長方形板上の点 $(x, y) = (0.35, 0.31)$ における変位 w を板厚 t で割った無次元量 w/t で表した。

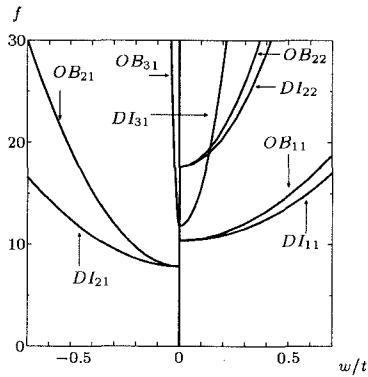


図 1 ケース1の荷重変位曲線

a) ケース1

図1にケース1で求めた荷重変位曲線を示す。ここでは Fourier 級数項として1次から6次までを用いた。

自明解である $w = 0$ の主経路から、ダイヤモンドパターンとストライプパターンがそれぞれ同時に分岐しているのが確認できる。図2に OB_{21}^- の変形モードを示す。

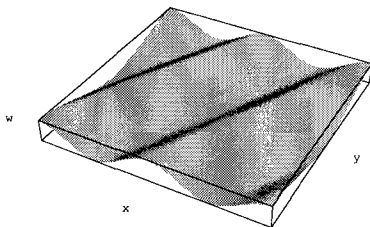


図-2 OB_{21}^- の変形モード

b) ケース2

図3にケース2で求めた荷重変位曲線を示す。ここでは Fourier 級数項として5次から10次を用いた。

ここでもダイヤモンドパターンとストライプパターンが同時に分岐しているのを確認できた。さらに、主経路からの分岐経路であるストライプパターンからさらにエシェロンモードが分岐するという2段階にわたる分岐の様子が確認できた。

その例として、図4, 5に OB_{98}^+ およびそこから分岐経路である $EC_{9,8,111,0}$ の変形モードを示す。

5. 結論

本研究では、2次元領域の変形が、群論的分岐理論と整合する多段階的分岐パターンを呈することが確認できた。この種の解析をさらに大規模なものにすることによって、実現象への適用を可能にすることがこれからの課題である。

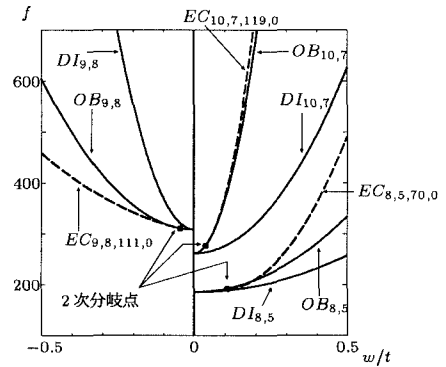


図-3 ケース2の荷重変位曲線

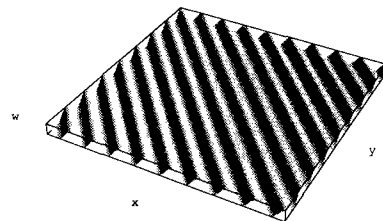


図-4 OB_{98}^+ の変形モード

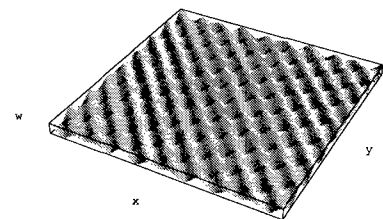


図-5 $EC_{9,8,111,0}$ の変形モード

参考文献

- 1) Ikeda, K. Murota, K. and Nakano, M.: Echelon modes in uniform materials. International Journal of Solids and Structures. 31, 2709-2733, 1994.