CS-210 均質化法による弾性解析のための高性能並列計算手法の開発

中央大学大学院　学生会員　○牧野　孝久
鹿島建設（株）　正会員　宇尾　朋之
中央大学理工学部　正会員　樫山　和男

1. はじめに

近年，複合材料のマルチスケール解析の一手法として漸近展開法に基づく均質化法[1)2)]が提案されている．均質化法では内部微視的構造を考慮した巨視的挙動を求めるために，微視的構造の幾何形状をより厳密にモデル化することが重要となる．しかし，それにともない記憶容量や計算時間が大幅に増大するという実用上において解決しなければならない問題がある．

そこで本報告は大規模問題に配慮するため，計算時間短縮のための均質化法に対する効率的な並列処理手法を構築し，さらに記憶容量削減のためのボクセルメッシュの有効的な利用法について述べるものである．数値解析例として複合材料の線形弾性問題を取り上げた．

2. 基礎方程式

弾性体の基礎方程式は，次の支配方程式，構成方程式で表される．

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0 \qquad (1)$$

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl}\varepsilon_{kl} \qquad (2)$$

均質化法では，対象とする巨視的構造が任意の周期性を持つ微視的構造で構成されているものとする．この巨視的構造と微視的構造の間に成り立つパラメータ（特性関数）を定めることで，微視的構造を考慮した巨視的構造の材料定数を決定し，その結果から微視的構造の断面力及び変位が得られる．巨視的構造の領域を記述する座標系$\boldsymbol{x}$と微視周期構造の領域を記述する座標系$\boldsymbol{y}$により，ユニットセルのスケール比ϵは次式で表される．

$$\epsilon = \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}}$$

このスケール比ϵに関して変位$u^{\epsilon}(x)$を漸近展開の形で表すと次のようになり，u^0はxのみの関数で表される．

$$u^{\epsilon}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = u^0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \epsilon u^1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \epsilon^2 u^2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \cdots \qquad (3)$$

$$u^0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = u^0(\boldsymbol{x}) \qquad (4)$$

以上より，微視的構造及び巨視的構造に関する方程式が得られる．

<u>微視的構造</u>

$$\int_Y D_{ijkl}\left(\frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l}\right)\frac{\partial v_i^1}{\partial y_j} dY = 0 \qquad (5)$$

$$\int_Y D_{ijkl}\frac{\partial \chi_k^{mn}}{\partial y_l}\frac{\partial v_i^1}{\partial y_j} dY = \int_Y D_{ijkl}\frac{\partial v_i^1}{\partial y_j} dY \qquad (6)$$

方程式(6)の解の存在を認めることにより，u_k^1が次式のように得られる．

$$u_k^1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = -\chi_k^{mn}(y)\frac{\partial u_m^0(\boldsymbol{x})}{\partial x_n} + \tilde{u}_k^1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \qquad (7)$$

上式の$\tilde{u}_k^1$は任意関数，$\chi_k^{mn}(y)$は特性変位関数であり，巨視的なひずみを与えた時に生ずる微視的な変位の乱れを表している．

<u>巨視的構造</u>

$$\int_\Omega D_{ijkl}^H \frac{\partial u_k^0}{\partial x_l}\frac{\partial v_i^0}{\partial x_j} d\Omega = \int_{\Gamma_t} t_i v_i^0 d\Gamma \qquad (8)$$

$$D_{ijkl}^H = \frac{1}{|Y|}\int_Y (D_{ijkl} - D_{ijmn}\frac{\partial \chi_m^{kl}}{\partial y_n}) dY \qquad (9)$$

ここでu^0, D_{ijkl}^Hはそれぞれ平均変位，均質化弾性係数であり，式(8)で平均物性を与えることになる．

3. 並列計算

並列計算[3)]の前処理として，全体の解析メッシュを使用するプロセッサと同数の小領域に分割する．これによりプロセッサの計算負荷の分散及び均等化を行い，計算時間の短縮を図る．

次に各節点での未知量を求める場合を考える．図-1において，節点Aを共有する各要素は全てプロセッサ1内に含まれているが節点Bではプロセッサ1，2の両方に含まれている．そこで節点Bに関する重ね合わせはプロセッサ1及び2両方の情報が必要となりプロセッサ間の通信を行わなければならない．また均質化法では微視的モデルに周期境界条件を適用しているので，このための通信を行う必要がある．本手法では領域境界と周期境界上で通信の必要な節点を前処理でデータとしてそろえておき，通信時にはこれらの節点のもつ情報を送受信している．なお，連立一次方程式の解法にはElement by Element SCG法[3)]を用いている．

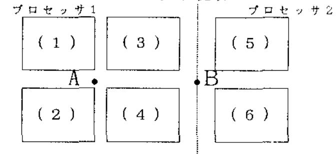


図-1　メッシュモデル図

KeyWords: 並列計算，均質化法，有限要素法，ボクセルメッシュ
〒112-8551　東京都文京区春日1-13-27,
Tel:03(3817)1815, Fax:03(3817)1803

4. ボクセルメッシュの有効利用

ここでは，ボクセルメッシュの利点を生かした数値解析手法を提案する．

ボクセルメッシュでは各要素形状が等しいので形状関数の一回微分の項の演算は一度行えば良い．さらに各要素の要素剛性マトリックスの演算においてもすべての要素に関して行う必要はなく，各材料毎に演算を行いそれを記憶しておけば良い．さらにボクセルメッシュでは節点番号及び要素番号が規則的に並んでいるため，各座標方向の分割数とボクセルの一辺の長さを記憶しておけば，要素番号から節点の座標と結合状態を求めることが可能である．これらにより記憶容量の大幅な削減を図ることができる．

5. 数値解析例

数値解析例として，立方体部材の単軸引張り問題について弾性解析を行った．巨視的モデルは対称性を利用して1/8の領域を取り出して要素分割した（図-2）．微視的構造には母材と骨材から成る複合材料モデルを作成し，要素数 8000，27000 の 2 種類のメッシュを用いた (図-3)．材料定数は表- 1 に示すとおりである．

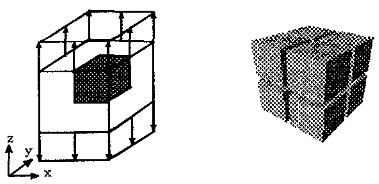
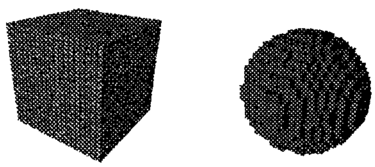


図-2　巨視的構造モデル



（要素数：8000）　　（骨材のみ）

図-3　微視的構造モデル

表- 1　材料定数

	弾性係数 $[kgf/mm^2]$	ポアソン比
母材	100.0	0.30
骨材	400.0	0.30

微視的構造における中心断面の軸方向の応力分布を図-4に示す．この図から弾性係数の高い骨材の方で大きな引っ張り応力が掛かっていることがわかる．また巨視的構造においては軸方向断面で一定の応力値が得られた．このことから妥当な結果が得られたといえる．

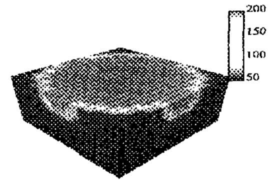


図-4　応力分布図

6. 並列処理の効果

並列処理の効果を調べた結果として演算速度倍率を図-5に，並列化効率を図-6に示す．要素数 27000 の計算では 8プロセッサを用いた場合 7.5 倍の速度倍率（並列化効率 94 %）を得られ非常に大きな速度向上が実現した．また要素数が多いほど効率が良く，さらに大規模な問題になっても有効になりうるといえる．

また，ボクセルメッシュを用いたことにより実行ファイルの大きさが 27000 要素の場合で 79.4[MB] から約 1/6 の 13.7[MB] になり，必要となる計算機容量が大幅に削減された．

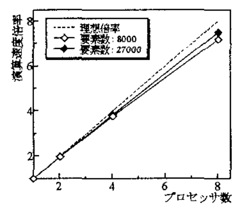


図-5　演算速度倍率

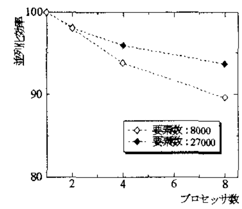


図-6　並列化効率

7. おわりに

本報告では，均質化法に対する効率的な並列計算法を構築した．そしてその結果，以下のことが明らかになった．

(1) Element by Element SCG 法を用いた並列計算手法は非常に高い並列化効率を実現し，均質化法における本並列化手法の有用性が示された．

(2) ボクセルメッシュを用いることにより大幅な容量削減が実現され，大規模計算に対して有効性が得られた．

今後，アスファルトやコンクリートなどの複合材料の力学的挙動をとらえるための，均質化法による弾塑性・粘弾性解析に対する効率的な並列計算手法の構築を行う予定である．

参考文献

1) José Miranda Guedes and Noboru Kikuchi: Preprocessing and postprocedsing for materials based on the homogenization method with adaptive finit element methods. *Computer Method in Applied Mechanics and Engineering.* Vol.83 ,p143-198,1990

2) 宇尾朋之, 樫山和男, 均質化法による内部構造を考慮したアスファルト混合物の粘弾性解析, 土木学会第 52 回年次学術講演会概要集第 I 部 (A),p60,1997,9

3) 玉井典, 樫山和男, 非構造格子に基づく三次元非圧縮粘性流れの並列有限要素解析, 第 11 回数値流体力学シンポジウム講演論文集,p557,1997,12