CS-191

3次元静弾性クラック問題における多重極積分方程式法について

京都大学工学研究科　学生会員　吉田研一
京都大学工学研究科　正会員　西村直志
京都大学工学研究科　フェロー　小林昭一

1 序

境界積分方程式法は取り扱う行列が密になる事が障害となり、その適用は案外小さい問題に限られてきた。ところが、最近、多重極法を用いた解法が提案され、パソコン程度の計算機でも数万元規模の問題の解析が可能になってきた。今回は、3次元静弾性クラック問題の積分方程式の高速解法として多重極法の適用を試みた。

2 3次元弾性体での多重極法

今、3次元無限弾性体内に、一般には複数の互いに交わらない曲線からなるクラック S が有るとする。3次元弾性方程式のクラック問題は次の境界値問題の解を求めることに帰着される。

$$\Delta^*_{ik} u_{ik} = 0 \quad \text{in } R^3, \qquad t = 0 \quad \text{on } S, \qquad t \to t^\infty \quad \text{as } |x| \to \infty$$

ここに Δ^*_{ik}は Navier の演算子、t^∞ は漸近場 u^∞に対応するトラクションであり、全平面で弾性方程式を満たす。また、上付きの+ (−) は S の法線が向く側からの極限、ないしはその反対を指す。この問題の解、および解くべき積分方程式は

$$u(\boldsymbol{x})_m = u^\infty_m(\boldsymbol{x}) + \int_S \frac{\partial}{\partial y_n}\Gamma_{mp} C_{jknp} n_k \varphi_j dS \text{ in } R^3\backslash S, \quad t^\infty_a = n_b C_{ablm} \int_S e_{rsl} C_{pnsj} \frac{\partial}{\partial y_n}\Gamma_{mp} e_{r\alpha\beta}\varphi_{j,\alpha} n_\beta dS \text{ on } S \tag{1}$$

となる。ここに、φ は開口変位であり、Γ は3次元弾性方程式の基本解であり、e は交代記号でギリシャ文字の添字も 1〜3 の値をとるものとする。
ここで、$r = |x - y|$ が以下のように展開される。

$$r = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{M=-N}^{N} \left(\frac{S_{N,M}(Ox)\overline{U_{N,M}}(Oy)}{2N+3} - \frac{T_{N,M}(Ox)\overline{R_{N,M}}(Oy)}{2N-1} \right) \quad |Ox| > |Oy| \tag{2}$$

ただし、$R_{N,M}, S_{N,M}, U_{N,M}, T_{N,M}$は原点 O からの点 x の極座標を (r, θ, ϕ) とすると,

$$R_{N,M}(Ox) = \frac{1}{(N+M)!} P^M_N(\cos\theta) e^{iM\phi} r^N, \quad S_{N,M}(Ox) = (N-M)! P^M_N(\cos\theta) e^{iM\phi} \frac{1}{r^{N+1}} \tag{3}$$

$$U_{N,M}(Ox) = r^2 R_{N,M}(Ox), \quad T_{N,M}(Ox) = r^2 S_{N,M}(Ox) \tag{4}$$

さて、今、S の部分 S_0 を要素に分割し、各要素上で φ が一定であるとすると、その部分 S_oでの式 (1) の第二式の積分は以下のように書くことが出来る。ただし,x は So から十分遠く,$|Ox| > |Oy| (y \in So)$ であるとし、部分 S_0は要素 S_iの集まりであるとすると、

$$\int_{S_0} e_{rsl} C_{pnjs} \Gamma_{mp,n} e_{r\alpha\beta} \varphi_{j,\alpha} n_\beta dS_y = \frac{1}{8\pi\mu} \sum_{N=0}^{P} \sum_{M=-N}^{N} \tag{5}$$

$$\left(\left(\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+2\mu} \delta_{ij} S_{N,M}(Ox) - \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu} x_j \frac{\partial}{\partial x_i} S_{N,M}(Ox) \right) \sum_i \oint_{\partial S_i} e_{rsl} C_{pnsj} \frac{\partial}{\partial y_n} \overline{R_{N,M}}(Oy) dy_r \phi^i_j + \right.$$

キーワード: 多重極積分方程式法、GMRES
連絡先: 〒 606-01 京都市左京区吉田本町 TEL 075-753-5115, FAX 075-753-5066

$$\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\frac{\partial}{\partial x_i}S_{N,M}(Ox)\sum_i \oint_{\partial S_i} e_{rsl}C_{pnsj}\frac{\partial}{\partial y_n}((Oy)_p\overline{R_{N,M}}(Oy))dy_r\phi_j^i\Bigg) \tag{6}$$

φ_j^i は S_iでの開口変位の j 成分である。また、P は式 (2) の無限和を有限個で打ち切る数である。これを使って多重極法のアルゴリズムに従って計算する。クラックは円形単一とし、$t^\infty = (0,0,1), P = 10$ とした。連立方程式の解法としては、前処理無しの GMRES を用いた。このようにしてクラック問題を解いた例の未知数の数と全計算時間を図 1 の左図に示した。なお、図中の'conventional' は従来法、'fmm' は線積分を解析的に評価した多重極法、'fmm1' は線積分を線分の中点での数値積分で評価した多重極法の CPU 時間である。また、図 1 の右図の'err' は'fmm' による解と、'fmm1' による解の相対誤差の絶対値の平均値で、'errmax' は誤差の中の最大値である。なお今回の計算は CPU:DEC Alpha 533MHz,Memory: 512MB の計算機で行なった。

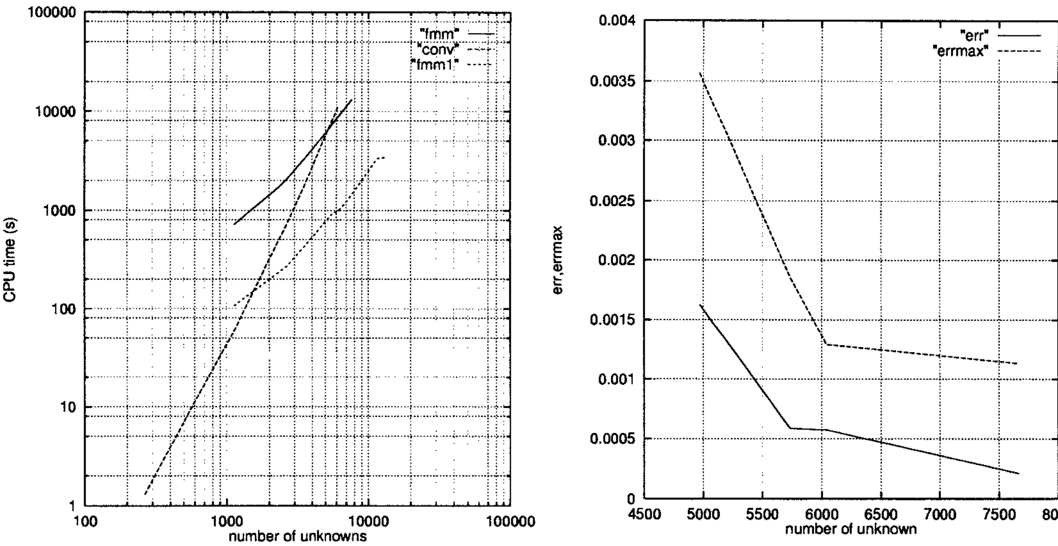

図 1: 従来法と多重極法の計算時間の比較, 二つの多重極の解の比較

3　最後に

今回は、3 次元の静弾性問題に高速多重極法を適用したが、今後は動弾性問題にへの適用を検討していきたい。

参考文献

[1] 西村直志: 多重極積分方程式法による 3 次元クラック問題の解析について, 境界要素法論文集 Vol.14(1997)

[2] Leslie Greegard: The Rapid Evaluation of Potential Fields in Particle Systems
The MIT Press Cambridge, Massachusetts
London, England 1987

[3] Michael A. Epton and Benjamin Dembart: Multipole Translation Theory for the Three-dimensional Laplace and Helmholtz Equations, SIAM J. SCI. COMPUT. Vol.16,No.4,pp.865-897,July 1995

[4] Milton Abramowitz and Irene A. Stegun: Handobook of Mathematical Functions ,Dover 1970