

粒状要素法シミュレーション解析による Hill の安定条件の考察

東北大学 正会員 岸野 佑次

1. はじめに Bardet¹⁾は個別要素法シミュレーション解析により粒状体に対して弾塑性論を排除する証拠はなかったとの結論を得ている。本文は粒状要素法²⁾を用い、より精度の高い検討を行うとともに、Hillの安定条件を考察した。
 2. 動的仮想仕事の原理による Hill の安定条件の誘導 境界 S に囲まれた密度 ρ の連続体領域 V に作用する表面力を $\mathbf{t}$ 、物体力を $\mathbf{b}$ 、応力を $\boldsymbol{\sigma}$ 、生じている加速度を $\boldsymbol{\alpha}$ とする。この系の動的釣り合い条件より、次の仮想仕事の原理が成立する。

$$\int_S \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} dS + \int_V (\mathbf{b} - \rho \boldsymbol{\alpha}) \cdot \delta \mathbf{u} dV = \int_V \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\epsilon} dV \quad (1)$$

ここに、 $\delta \mathbf{u}$ は任意の連続な変位場、 $\delta \boldsymbol{\epsilon}$ は $\delta \mathbf{u}$ より導かれるひずみ場である。

時刻 $\Delta \tau$ 後に $\mathbf{t}$ が $\mathbf{t} + \Delta \mathbf{t}$ 、 $\boldsymbol{\sigma}$ が $\boldsymbol{\sigma} + \Delta \boldsymbol{\sigma}$ 、 $\boldsymbol{\alpha}$ が $\boldsymbol{\alpha} + \Delta \boldsymbol{\alpha}$ になったとし、 $\mathbf{b}$ は一定とする。この状態に対する仮想仕事の原理は次式となる。

$$\int_S (\mathbf{t} + \Delta \mathbf{t}) \cdot \delta \mathbf{u} dS + \int_V \{\mathbf{b} - \rho(\boldsymbol{\alpha} + \Delta \boldsymbol{\alpha})\} \cdot \delta \mathbf{u} dV = \int_V (\boldsymbol{\sigma} + \Delta \boldsymbol{\sigma}) : \delta \boldsymbol{\epsilon} dV \quad (2)$$

式(1)、(2)の $\delta \mathbf{u}$ 、 $\delta \boldsymbol{\epsilon}$ は任意であるから、 $\Delta \tau$ 後までに実際に生じた増分 $\Delta \mathbf{u}$ 、 $\Delta \boldsymbol{\epsilon}$ についても成立しなければならない。 $\delta \mathbf{u}$ 、 $\delta \boldsymbol{\epsilon}$ をこのように置き換えて式(1)、(2)を辺々引くと次式を得る。

$$\int_V \rho \Delta \boldsymbol{\alpha} \cdot \Delta \mathbf{u} dV = \int_S \Delta \mathbf{t} \cdot \Delta \mathbf{u} dS - \int_V \Delta \boldsymbol{\sigma} : \Delta \boldsymbol{\epsilon} dV \quad (3)$$

ところで、この系が安定であるためには、 $\Delta \tau$ の間に生じる加速度増分ベクトルと変位増分ベクトルの内積が負(運動が起こった場合に復元性を確保)でなければならないので次式が成立する必要がある。

$$\int_V \Delta \boldsymbol{\sigma} : \Delta \boldsymbol{\epsilon} dV > \int_S \Delta \mathbf{t} \cdot \Delta \mathbf{u} dS \quad (4)$$

とくに、境界上で $\Delta \mathbf{u} = 0$ または $\Delta \mathbf{t} = 0$ (表面力が死荷重) の場合の安定条件は次式で与えられる。

$$\int_V \Delta \boldsymbol{\sigma} : \Delta \boldsymbol{\epsilon} dV > 0 \quad (\text{Hill の安定条件}) \quad (5)$$

ここに、 $\Delta \boldsymbol{\sigma}$ は表面力が与えられた境界(単位外向き法線ベクトル $\mathbf{v}$)において $\mathbf{v} \cdot \Delta \boldsymbol{\sigma} = 0$ を満たす場である。以上のように、Hill の安定条件は式(4)で表される一般的不等式の特殊な場合として誘導されることが注目される。

3. 粒状要素法によるシミュレーション解析と考察 Hill の安定条件は構成則とは無関係に成立する式であるが、具体的にこの式が満たされるかどうかは構成則に依存する。例えば弾性体の場合、式(5)の被積分関数は正値 2 次形式となり、Hill の安定条件は満たされる。非関連流動則の場合、応力増分テンソル $\Delta \boldsymbol{\sigma}$ に対して負荷方向における塑性ひずみ増分テンソルは $\Delta \boldsymbol{\epsilon}_p = (1/h) \mathbf{m} \mathbf{n} : \Delta \boldsymbol{\sigma}$ と表される。ここに、 $\mathbf{m}$ は流動則により定まる塑性ひずみ増分方向を表す単位のテンソル ($\mathbf{m} : \mathbf{m} = 1$)、 $\mathbf{n}$ は降伏曲面の外向き法線を表す単位のテンソル ($\mathbf{n} : \mathbf{n} = 1$)、 h は硬化状態により定まるスカラー量である。流動則より $\Delta \boldsymbol{\sigma} : \Delta \boldsymbol{\epsilon}_p = (\mathbf{m} : \Delta \boldsymbol{\sigma})(\mathbf{n} : \Delta \boldsymbol{\sigma})/h$ となるので、2 次の塑性仕事増分の正負は $\mathbf{m} : \Delta \boldsymbol{\sigma}$ の正負によって定まる。2 次の塑性仕事増分が正であれば、2 次の弾性仕事増分は正であるので、Hill の安定条件は満たされる。Hill の安定条件が実際の粒状体モデルにおいて満たされるかどうかを確かめる目的で粒状要素法によるシミュレーション解析をおこなった。用いた粒状体モデルを図-1 に示す。載荷の制御は応力制御とし、領域周辺に配置した要素は常に応力 3 成分に対応するひずみ 3 成分に従う並進移動を強制した。粒子間バネ定数は法線および接線方向をそれぞれ 1000 および 700 kgf/cm、粒子間摩擦角は 25° とした。初期状態の拘束圧は 2 kgf/cm^2 とし、まず x_2 方向軸応力のみを増加させるせん断載荷試験を行った。得られた応力ひずみ関係を図-2 に示す。次に、図中の B 点において弾塑性挙動を調べるための応力制御プロブ試験を行った。応力増分の絶対値を $|\Delta \boldsymbol{\sigma}| = 0.01 \text{ kgf/cm}^2$ とし主応力空間上で 9° 毎の 40 方向に載荷除荷を行い弾塑性ひずみ、および 2 次の塑性仕事増分と全仕事増分を求めた。図-3 に各プロブ方向における塑性ひずみ増分の絶対値を示した。この図より、明らかに弾塑性論における塑性ひずみを生じる負荷方向と弾性ひずみのみの除荷方向があることがわかる。B 点における降伏曲線の接線を図-3 に示した。この接線に直交する方向が $\mathbf{n}$ である。一方、ひずみ空間における塑性ひずみ増分ベクトルのプロットを図-4 に示す。このベクトルは応力増分方向に拘わらずほぼ一定方向 $\mathbf{m}$ を向いており、ほぼ流動則が成立している。しかし $\mathbf{m} \neq \mathbf{n}$ であり、図-3 のグレー色の方向で $\mathbf{m} : \Delta \boldsymbol{\sigma}$ は負となる。この部分で実際に 2 次の仕事増分が負になるかどうかを調べたものが図-5 および 図-6 である。図-5 より明らかなように、詳細に調べると $\mathbf{m}$ は負荷方向で一定ではなく、いわゆる増分非線形性を示している。これにより、図-6 に示すように 2 次の仕事増分は正となり、Hill の安定条件は満たされている。なお、C 点では安定条件は満たされない。

Keyword : Granular materials, Granular Element Method, Probe test, Elastoplasticity, Hill's condition

〒980-8579 仙台市青葉区荒巻青葉東北大学大学院工学研究科土木工学専攻 TEL 022-217-7421 FAX 022-217-7423

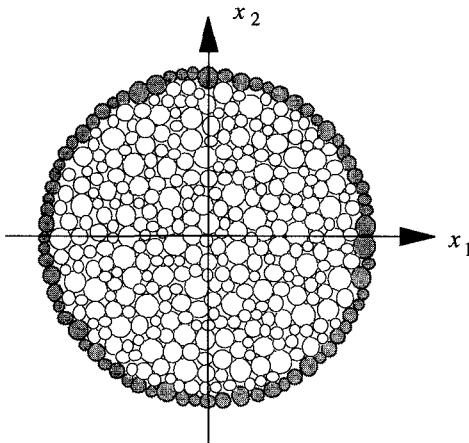


図-1 解析に用いた粒状体モデル

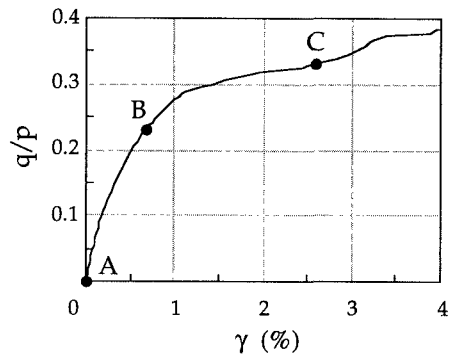


図-2 応力ひずみ関係

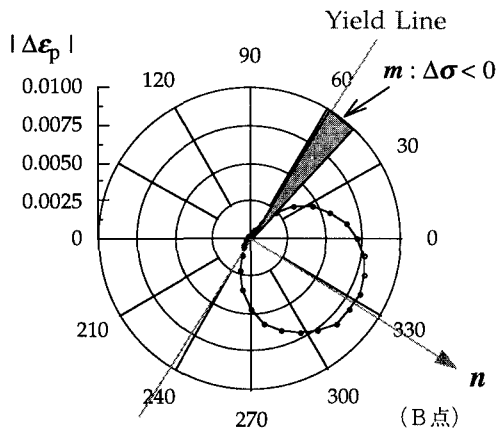


図-3 各プローブ方向の塑性ひずみ増分の大きさ

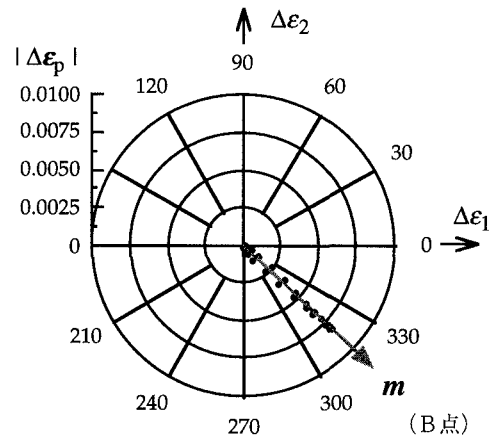


図-4 ひずみ空間における塑性ひずみ増分のプロット

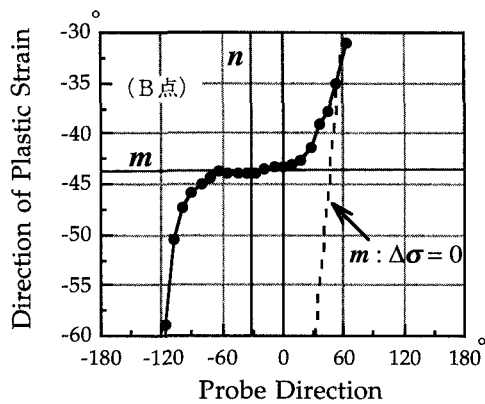


図-5 各プローブ方向の塑性ひずみ増分ベクトルの方向

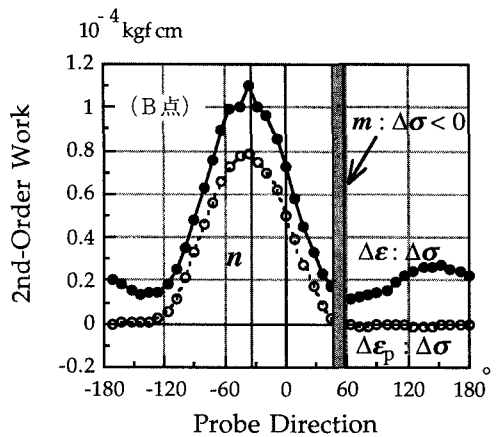


図-6 各プローブ方向の2次の仕事増分

参考文献 1) Bardet, J.P. : Numerical simulation of the incremental responses of idealized granular materials, Int. J. Plasticity, 10, pp.879-908, 1994. 2) 武・岸野・京谷:改良粒状要素法による粒状体の弾塑性挙動の研究, 構造工学論文集, 43A, pp.403-412, 1997