

欠陥による多重散乱解析法の開発

東北大学 工学部 正員 岸 典之
 東北大学 大学院 学生員 岸部 大蔵
 東北大学 工学研究科 正員 北原 道弘

1. はじめに

欠陥が材料内に分布して存在する場合、欠陥群に入射された入射波動エネルギーは欠陥により散乱された散乱波動エネルギーのために散乱減衰を生じる¹⁾。逆に、散乱減衰量が計測できれば、散乱減衰、散乱波動エネルギーおよび散乱体の分布形態の三者は密接に関係していることから、散乱波動エネルギー量が評価可能であるという前提のもとに、散乱体の分布形態を推定できる可能性がある。

第一段階として、ここでは2つのクラックによる散乱波動エネルギー量の算定法について考える。以下、多重散乱問題を境界積分方程式により定式化し、これをボルン級数的に解析する手法について要約し、散乱エネルギー量を散乱体の幾何学的断面積に換算表示した散乱断面積の一解析例を示す。

2. 多重散乱問題の定式化

図-1に示す2個のクラックによる多重散乱問題を考える。図中の u^{IN} と u^{SC} は入射波と散乱波であり、波動 u は u^{IN} と u^{SC} の和として定義される。いま、散乱波 u^{SC} は、クラックの開口変位 Δu_j と応力基本解 Ξ_{ijk} より次の様に積分表現できる。

$$u_i^{SC}(x) = \int_{S_{C1}+S_{C2}} \Xi_{ijk}(x, y) n_k(y) \Delta u_j(y) dS_y, \quad x \in D \quad (1)$$

上記散乱波の表現に応力に関する微分を行えば、散乱波による応力の積分表現を得る。ここで直接クラック面 S_{C1} への境界極限をとると、超特異積分となり数値解析が困難になる。そこで、テイラー展開により特異項を分離した後、この項を正則化し、この段階でクラック面上で全応力が零なる境界条件を適用する。こうして得た積分方程式を二次の形状関数 Φ_a を利用して離散化すると次のようになる。

$$\begin{aligned} -f_j^{IN}(x_a) = & n_3 C_{3jka} \int_{S_{C1}} \Phi_{b,\alpha} \Xi_{km3}^0 dS_y \Delta u_{bm} \\ & - n_3 C_{3jk3} \int_{S_{C1}} \Phi_{b,\alpha} \Xi_{kma}^0 dS_y \Delta u_{bm} \\ & + n_3 \sum_n C_{3jka} \int_{S_{C1}} \Phi_b \Xi_{km3,\alpha}^n dS_y \Delta u_{bm} \\ & + n_3 \sum_n C_{3jk3} \int_{S_{C1}} \Phi_b \Xi_{km3,3}^n dS_y \Delta u_{bm} \\ & + n_3 C_{3jkl} \int_{S_{C2}} \Phi_b \Xi_{kmn,l}^n(x, y) n_n dS_y \Delta u_{bm} \\ & , \quad x_a \in S_{C1} \end{aligned} \quad (2)$$

$f_j^{IN}(x_a)$ は入射波による応力、 C_{ijkl} は等方弾性テンソルである。同様にクラック面 S_{C2} への極限過程においても同様な離散化を行う。ここでクラック面上の局所座標から全体座標への変換行列を作用させて開口変位を未知量とす

る次の積分方程式系を得る。

$$\begin{Bmatrix} \bar{f}_1 \\ \bar{f}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{K}_{11} & \bar{K}_{12} \\ \bar{K}_{21} & \bar{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \bar{u}_1 \\ \Delta \bar{u}_2 \end{Bmatrix} \quad (3)$$

上付のバーは全体座標系を示す。 $\bar{f}_1$ と $\bar{f}_2$ はそれぞれクラック S_{C1} と S_{C2} 上の入射波応力、 $\bar{K}_{11}$ と $\bar{K}_{21}$ は S_{C1} 上の積分項、 $\bar{K}_{12}$ と $\bar{K}_{22}$ は S_{C2} 上の積分項、 $\Delta \bar{u}_1$ と $\Delta \bar{u}_2$ は S_{C1} と S_{C2} 上の開口変位である。

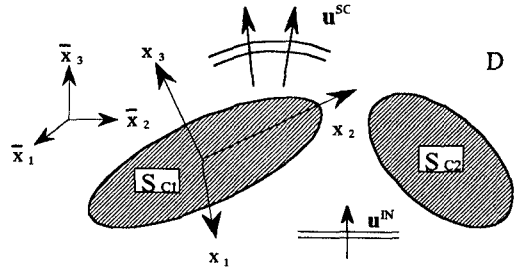


図-1 無限体 D 内のクラック S_{C1} と S_{C2}

3. ボルン級数の導入

式(3)を次の様に分解する。以下上付のバーは省略する。

$$(A - B) \Delta u = f \quad (4)$$

$$A = \begin{bmatrix} K_{11} & 0 \\ 0 & K_{22} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & -K_{12} \\ -K_{21} & 0 \end{bmatrix} \\ \Delta u = \{\Delta u_1, \Delta u_2\}^T, f = \{f_1, f_2\}^T \quad (5)$$

ここで A は独立したクラックに関する積分項の行列、 B はクラックの相互作用に関する積分項の行列である。つまり式(4)は相互作用の影響を分離した形になっている。式(4)に A^{-1} を作用させると次のようになる。

$$(I - C) \Delta u = A^{-1} f \quad (6)$$

$$C = A^{-1} B = - \begin{bmatrix} 0 & K_{11}^{-1} K_{12} \\ K_{22}^{-1} K_{21} & 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

ここで $\|C\| < 1$ が成り立てば、式(6)より解 Δu は次のように表せる。

$$\Delta u = (I - C)^{-1} A^{-1} f = \sum_{k=0}^{\infty} C^k A^{-1} f \quad (8)$$

ここでこの級数の第1項を Δu の第0次近似として Δu_0 とおく。この Δu_0 は入射波による応力 f だけで決まり、解 Δu のボルン近似となる。式(8)の級数表現は、第1項がボルン近似と一致するという意味において、解 Δu のボルン級数と呼べる。いま、第 n 次近似は次のように書ける。

$$\Delta u_n = \Delta u_0 + C \Delta u_{n-1} = \sum_{k=0}^n C^k \Delta u_0 \quad (9)$$

キーワード：多重散乱 クラック ボルン級数 散乱断面積

〒980-8579 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉06 TEL 022-217-7126 FAX 022-217-7127

また、級数の収束パラメータを次のように定義する。

$$E^n = \frac{\|C^n \Delta u_0\|}{\|\Delta u_n\|} \quad (10)$$

E^n は第 n 次ボルン級数近似での第 n 番目の項の寄与率を表しており、この E^n を級数の収束判定に用いる。

4. 散乱断面積

散乱断面積 P は、散乱波の時間平均パワーと入射波の時間平均インテンシティの比として定義され、立体角 Ω による散乱微分断面積 $dP/d\Omega$ は、縦波の散乱振幅 A_L 、横波の散乱振幅 A_T 、 A_H により次式で表される。

$$\frac{dP}{d\Omega} = |A_L|^2 + \frac{k_L}{k_T} (|A_T|^2 + |A_H|^2) \quad (11)$$

上式より、散乱断面積 P は散乱微分断面積 $dP/d\Omega$ を単位球面上で積分することにより得られる。

5. 解析結果

今回の解析では、2個の半径 a の円形クラックを間隔 a をとり水平に配置し、入射縦波の波数 k_L と入射角 θ を変えて入射した。ボルン級数の収束性を表すパラメータ E^n と項数 n の関係を図-2 に示す。左と右は最も収束が遅い場合（左）、早い場合（右）である。ここでの波数の表示では、縦波の波数 ak_L を横波の波数 $ak_T = ak_L \sqrt{2(1-\nu)/(1-2\nu)}$ に換算して表示している。また、散乱断面積と横波波数の関係を図-3 に示す。図-4 には散乱微分断面積を、クラック1個の場合と2個の場合で比較した一例を示す。

図-2 より、最も収束が遅い場合でも項数 $n = 10$ 回で $E^n = 0.05$ 以下になる事から、ボルン級数の収束性は工学上十分である。また図-3 と図-4 より、クラック1個と2個の場合では散乱微分断面積の特性が異なるにもかかわらず

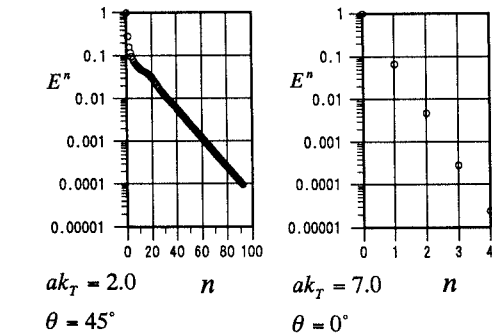


図-2 ボルン級数の収束性

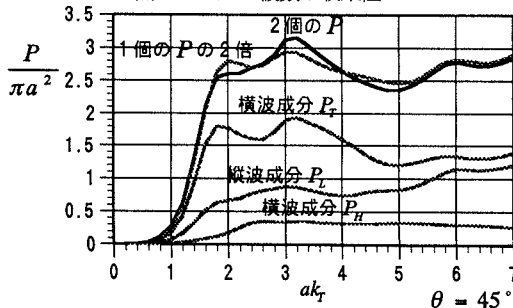


図-3 二つのクラックによる散乱断面積 P

らず、クラック2個場合の散乱断面積はクラック1個の散乱断面積を2倍したものにほぼ一致している事が分かる。

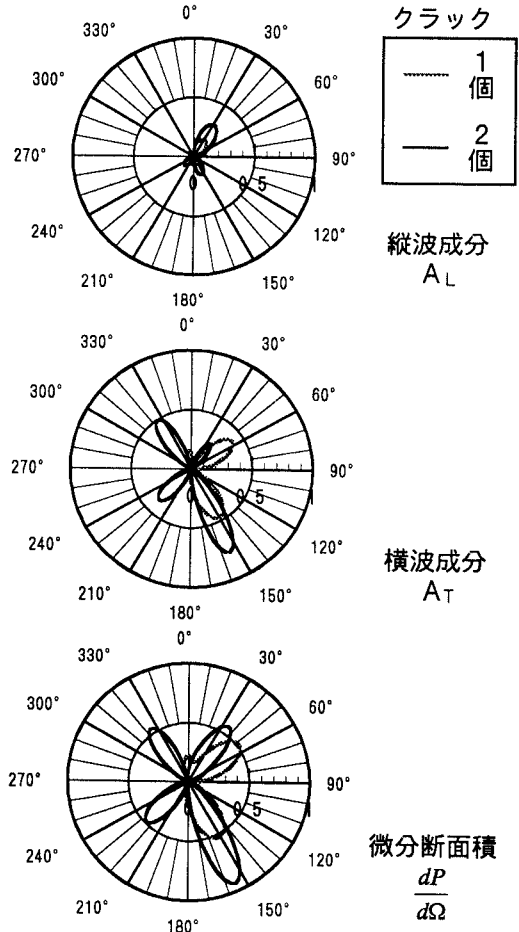
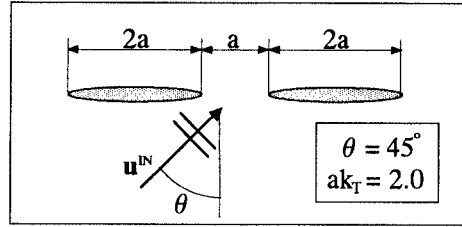


図-4 散乱微分断面積 $dP/d\Omega$ の比較

6. 結論

(1) ボルン級数による解法は工学上許容する精度の範囲で十分な収束性を有している事、(2) エネルギーの方位依存性を表す散乱微分断面積に関わらず、クラック1個の散乱断面積を2倍するとクラック2個の散乱断面積とほぼ一致する事がわかった。

参考文献

- 1) A.I. Beltzer: The effective dynamic response of random composites and polycrystals - A survey of the causal approach, Wave Motion, Vol.11, pp.211-229, 1989.