土木学会第53回年次学術講演会 (平成10年10月)

CS-184

多重極 Galerkin 境界積分方程式によるクラックの高速解法について

京都大学大学院 学生会員 宮越 優
京都大学工学研究科 正会員 西村直志
京都大学工学研究科 フェロー 小林昭一

1 序

境界積分方程式法は得られる行列が密になるため、案外小さい問題にしか適用出来ないと考えられてきたが、最近、多重極法等の高速解法によってパソコン程度の計算機でも数万元規模の問題の解析が可能になってきた。本報では前報 [1] に引き続き、2 次元面外剪断問題における多重極 Galerkin 法によるクラック問題の解法を検討した。

2 2 次元面外剪断 crack 問題

今、2 次元無限弾性体中に、一般には複数の互いに交わらない曲線からなるクラック S が有るとする。2 次元面外剪断変形弾性クラック問題は次の境界値問題の解を求めることに帰着される。

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } R^2, \qquad \frac{\partial u^{\pm}}{\partial n} = 0 \quad \text{on } S, \qquad u \to u^{\infty} \quad \text{as } |x| \to \infty$$

ここに u^{∞} は全平面での Laplace 方程式の解で物理的にはクラックがないときの解を表し、上付きの $+$ $(-)$ は S の法線が向く側 (その反対側) からの極限を指す。この問題の解、および解くべき積分方程式は

$$u(\boldsymbol{x}) = u^{\infty}(\boldsymbol{x}) + \int_S \frac{\partial}{\partial y_n} G(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\phi(\boldsymbol{y})ds \text{ in } R^2 \setminus S, \quad -\frac{\partial u^{\infty}}{\partial n} = \mathrm{pf}\int_S \frac{\partial^2}{\partial n_x \partial n_y} G(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\phi(\boldsymbol{y})ds \text{ on } S \tag{1}$$

となる。ここに、ϕ は開口変位、$G = -1/2\pi \log|\boldsymbol{x}|$ は 2 次元 Laplace 方程式の基本解である。

さて、クラック問題の超特異積分方程式の解析精度は Galerkin 法を用いることによって飛躍的に向上することが知られているが、これまで、解析効率を考慮して選点法が用いられることが多かった。しかし、多重極法を用いることにより、Galerkin 法の効率を高めることが出来る。Laplace 方程式のクラック問題の変分方程式は次のように書ける。

$$\int_S \frac{\partial \psi}{\partial s}(\boldsymbol{x}) \int_S \frac{\partial G}{\partial s_y}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\phi(\boldsymbol{y})ds_y ds_x + \int_S \psi \frac{\partial u^{\infty}}{\partial n} ds = 0, \quad G(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{2\pi}\log|\boldsymbol{x}| \tag{2}$$

ここに、ψ は test 関数である。式 (2) 左辺第 1 項の内側の積分に多重極法 [1] を適用すれば、式 (2) を Galerkin 法によって容易に解くことが出来る。実際、多重極展開公式

$$\int_S \frac{\partial G(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}{\partial s_y}\phi(\boldsymbol{y})ds = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2\pi}\int_S \frac{1}{z_0 - z}\phi dz\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re}\frac{1}{2\pi z_0^n}\int_S z^{n-1}\phi dz \tag{3}$$

が成り立つ。ここに z_0、z は、各々 $\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{y}$ に対応する複素数であり、$|z_0| > |z|$ が成り立つものとする。式 (3) 最右辺の積分は多重極モーメントと呼ばれる。これを用いて通常の多重極法により式 (2) 左辺第 1 項の内側の積分に対応する局所展開係数を計算すれば、同じ項の外側の積分の多重極展開に対応する項は単なる多項式の積分であるので、数値積分で容易に評価することが出来る。

なお、式 (2) 左辺第 1 項の内側の積分の表示は、ここで示した形の他に正則化しない形や、接線微分を部分積分により G から ϕ に移動させるもの等考えられるが、この表示ではベクトル量を扱わなくて良いこと、及び遠方での積分項の減衰のオーダーが形状関数の取扱によらず距離の逆数程度であること等を考慮して選定した。

キーワード: 亀裂解析、Galerkin 法、多重極展開法
連絡先: 〒 606-8501 京都市左京区吉田本町 TEL 075-753-5115, FAX 075-753-5066

3　数値解析

数値解析法の概要は次のとおりである。まず、変分方程式 (2) の離散化には Galerkin 法を用い、形状関数は区分線形とする。多重極法は既知のϕ に対して式 (2) を多数の点で評価する手法であるから、式 (2) の離散化によって得られる連立方程式の解法としては、繰り返し解法が必要となる。ここでは行列を書き下せば対称になることを考慮せず、GMRES を用いた。前処理は行なわない場合と、前報に倣って最下層の cell に対応するブロック対角行列の逆を前処理行列とする場合を試みた。また、式 (3) の無限級数は 20 項で打ち切り、式 (2) 左辺第 1 項の内側の積分は解析的に、外側の積分は Gauss の 4 点公式を用いて評価した。計算は sun SS20 で行なった。

図 1 左には単一の直線亀裂に $\partial u^\infty/\partial n=1$ が作用した場合の各種多重極法による解析の CPU 時間を示す。実線は選点法による多重極法 (前処理あり)、破線は Galerkin 多重極法による結果を示し、太線は前処理無し、細線は前処理ありを示す。特に行列の好条件件を反映して、前処理をしない Galerkin 法は未知数が 500 程度の問題で、前処理を用いた選点法より高速となっている。また、図 1 右にはクラック中点での開口変位の解析精

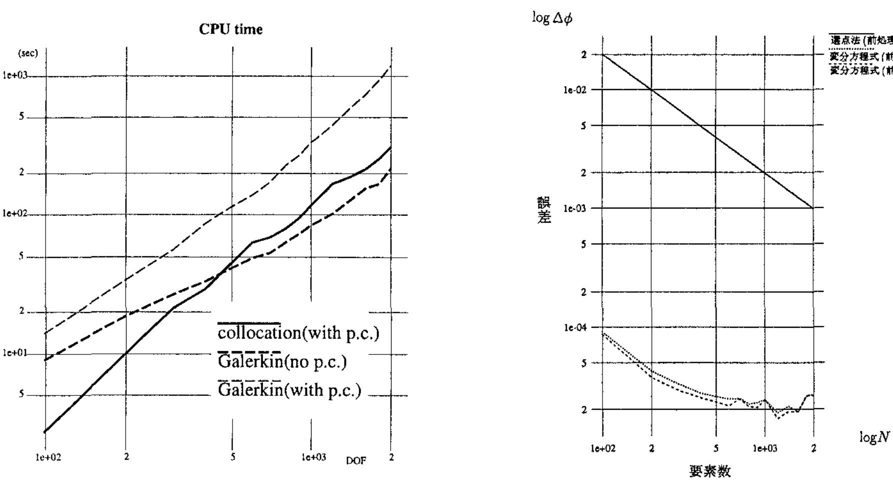

図 1: 左:CPU 時間、右:開口変位の精度

度を未知数の数の関数として示す。これより、Galerkin 法は 選点法に比べて 2 桁程度精度が良いことがわかる。なお、Galerkin 法による結果ではある程度未知数が多くなると解析精度も頭打ちになっているが、これは多重極展開の項数を有限で打ち切ったことや、GMRES の解の収束判定判定等を考慮して、使用しているパラメータの範囲でコード の精度の限界まで到達したものと考えられる。

4　結言

本報告では多重極 Galerkin 積分方程式法を定式化し、その効率と精度の高さを確かめた。提案する手法を用いれば多数のクラックの相互作用を容易に解析することが出来、材料の力学への応用も期待される。当日はそのような例についても述べる予定である。

参考文献

[1] 西村直志、吉田研一、小林昭一: 境界要素法論文集 14, 37–42, 1997.