土木学会第53回年次学術講演会（平成10年10月）

CS-183

# スカラー成層波動場のGreen関数のスペクトル測度による表現とその工学的応用の可能性について

東京理科大学　正会員　東平光生

## 1. はじめに

Lambの1904年の論文[1)]以来，弾性波動場のGreen関数の表現に現れる波数積分の中で，留数定理からの寄与は表面波であり，分岐点回りの積分は実体波であるという認識が与えられている．一方，1930年前後におけるVon Neumannによるヒルベルト空間論による量子力学の定式化以来，関数解析学をベースとした数理物理学の新しい流れが生まれ今日に至っている[2)]．しかしながら，ヒルベルト空間上の作用素のスペクトル理論の観点から弾性波動方程式のGreen関数を見直す仕事はそれほど多くないようである．こうした中，著者は先の論文で，スカラー成層波動場のGreen関数の離散および連続スペクトルに対する固有関数による完全な分解式を示した[3)]．この論文の意義は，Green関数の離散および連続スペクトルに対する固有関数への分解を層数とは無関係に普遍的に示した点にあるが，一方でスペクトル分解定理の示す数学的形式[2)]とはギャップがある．ここでは，先の論文で示したGreen関数の固有関数への分解式からスペクトルの測度を定義し，スペクトル分解定理が与える数学的形式でスカラー成層波動場のGreen関数を表現すると共に，このGreen関数の表現形式の工学への適用可能性を検討する．

## 2. 固有関数を用いたスペクトル測度の定義

先の論文に示したように，スカラー成層波動場のGreen関数は次式で示される[3)]．

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=-\frac{i}{4}\sum_{n=1}^{N}H_0^{(2)}(k_n r)P_n(z,z')-\frac{i}{4}\int_C H_0^{(2)}(k_n r)Q_k(z,z')|dk| \tag{1}$$

ここに，$G$はGreen関数，$\boldsymbol{r}$は観測点，$\boldsymbol{r}'$はソース点，$H_0^{(2)}$はゼロ次の第2種Hankel関数，$k_n$は離散スペクトルの波数，$P_n$は離散スペクトル領域の射影作用素の積分核，$Q_k$は連続スペクトル領域の射影作用素の積分核，$k$は水平方向の波数，$C$はFig. 1に示す積分経路である．また，$r$はソース点と観測点の水平距離，$z$は観測点の鉛直座標，$z'$はソース点の鉛直座標である．なお，Fig.1の$k_{\alpha L}$は半無限媒質の波数である．

ここで，式(1)の積分経路$C$と離散スペクトル領域の波数を覆う集合$M=(-i\infty,0]\cup[0,\infty)$を考え，集合$M$の部分集合$B\subset M$に対する集合関数$E_B$を次のように定義する．

$$E_B(z,z')=\sum_{k_n\in B}P_n(z,z')+\int_{C\cap B}Q_k(z,z')|dk| \tag{2}$$

さらに，$E_B$を積分作用素の核として，次の作用素$\hat{E}_B$を定義する．

$$\hat{E}_B f=\int_0^\infty E_B(z,z')f(z')dz' \tag{3}$$

この$\hat{E}_B$は次式を満足し，いわゆるスペクトルの測度[2)]となる．

$$\begin{aligned}\hat{E}_{B=M}&=I\quad (I\text{: identity operator})\\ \hat{E}_{B=\emptyset}&=0\\ \hat{E}_{B_1}\hat{E}_{B_2}&=\hat{E}_{B_1\cap B_2}\\ B=\cup_{n=1}^{\infty}B_n,\ \ B_n\cap B_m=\emptyset,\ (n\neq m)\ \ &\Rightarrow\ \ \hat{E}_B=\lim_{N\to\infty}\textstyle\sum_{n=1}^{N}\hat{E}_{B_n}\end{aligned} \tag{4}$$

このように，$E_B$はスペクトルの測度を構成する一方，式(1)と(2)より，Green関数は$E_B$を用いたStieltjes積分によって，次のように表わされる．

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=-\frac{i}{4}\int_M H_0^{(2)}(kr)dE_{B_k}(z,z') \tag{5}$$

ここに，$B_k$はたとえば，$k$が虚数軸にある場合には$B_k=(-i\infty,k)$であり，$k$が実軸にあるときには$B_k=(-i\infty,0]\cup[0,k)$で考える．

---

*key words*: Green's function, spectral theory, layered medium, eigenvalue problems
〒278-8510　野田市山崎 2641　東京理科大学土木工学科 Phone:0471-24-1501　Fax:0471-23-9766

### 3. 数値計算例

式(5)はスペクトル分解定理で与えられる数学的形式でGreen関数を書き下したものであるが，Green関数に現れる$dE_{B_k}$の性質については，この段階では不明である．ここでは，Fig. 2に示す2層からなる弾性流体の波動場について，$dE_{B_k}$の意味を数値計算を基に検討する．観測点を自由表面から深さ0.9 kmの位置にとり，ソース点を自由表面から0.5 kmの位置にとった場合と5.0 kmの位置にとった場合のスペクトルをFig. 3およびFig.4で比較する．これらの図では横軸に波数を，縦軸には$dE_{B_k}$をとっている．グラフは，連続的な部分が連続スペクトルの強度を，離散的な部分が離散スペクトルすなわち正規モードの強度を表わしている．ソース点の位置が深くなれば，これらの図から，離散スペクトルの寄与が小さくなることが見て取れる．これは，正規モードの振幅が基盤層で急速に減衰することとGreen関数の相反性からの帰結である．一方，連続スペクトルの寄与はソース点の深さに関わらずほぼ一定である．これは，連続スペクトルに対する固有関数が基盤層で三角関数的に振動し減衰しない[3]ことによる．表層で大きな振幅を持つ離散スペクトルの固有関数は表層の媒質の特性を反映する一方，基盤層で振幅の減衰しない連続スペクトルの固有関数が媒質の深部の特性を反映する．これより，Fig.3およびFig.4は媒質の特性の表現であると考えても良い．こうした認識はGreen関数のスペクトル表現を通して可能になったことであり，連続スペクトルの媒質深部の性質を反映する性質は，地盤探査などの工学的な応用について期待できる．

### 4. 結論

本論文ではスカラー成層波動場のGreen関数をスペクトルの測度に基づくStieltjes積分で表示し，スペクトルの測度の性質を調べるために，若干の数値計算を行った．この結果によれば，Green関数の中の離散スペクトルは表層の媒質の影響を反映し，連続スペクトルは媒質深部の特性を反映することとなった．また，ソース点が媒質深部にある場合には，表層の媒質の影響を表わす離散スペクトルの寄与が小さくなることをスペクトル分解の視点で明確に捉えることができた．

#### 参考文献

1) Lamb, H: On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid, *Phil. Trans. Roy. Soc.* **A, 203**, pp. 1-42, 1904.
2) 新井朝雄：ヒルベルト空間と量子力学(共立講座 21世紀の数学)，共立出版，1997
3) 東平光生: 離散固有値および連続固有値を用いたGreen関数のスペクトル分解表示について，土木学会論文集, No. 577/I-41, pp.245-256, 1997

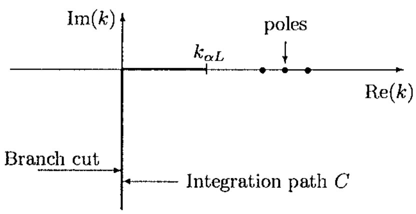


Fig. 1 Integration path $C$ in the complex wavenumber plane.

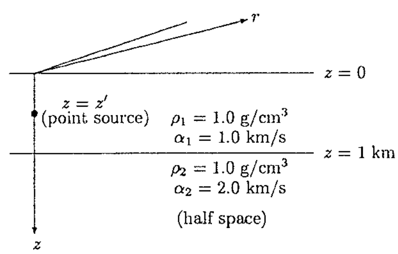


Fig. 2 Analyzed model. A surface liquid layer is overlying a liquid half space.

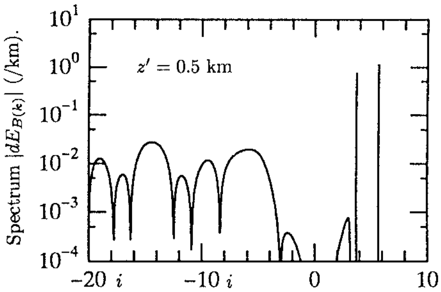


Fig. 3 Wavenumber spectrum for the spectral family.

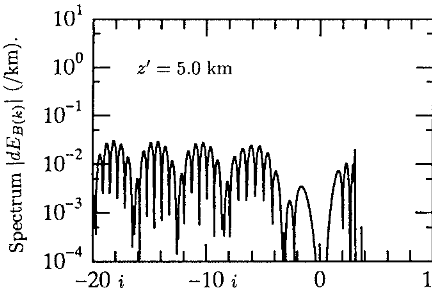


Fig. 4 Wavenumber spectrum for the spectral family.