土木学会第53回年次学術講演会（平成10年10月）

Ⅶ-21

条件付確率場における地下水汚染物質輸送モデルの同定

大和団地　正会員　山本明弘
鳥取大学工学部　正会員　野田　茂

1. はじめに

地下水汚染問題の深刻化に伴い、地盤内の汚染物質流動を的確に把握することが重要になってきている。このためには支配パラメータである分散係数の空間分布を精度よく推定しなければならない。そこで、本研究では、分散係数の空間分布を対数正規確率場とみなし、汚染物質輸送解析と条件付非正規確率場の逐次型同定アルゴリズムをハイブリッドし、複数地点の観測データ（濃度と分散係数）を用いて、未観測点の物理量（濃度と分散係数）の時空間分布を合理的に推定する方法を提案する。数値計算として、本方法を平面2次元非定常の汚染物質輸送モデルに適用し、本同定アルゴリズムの有効性を明らかにする。

2. 条件付非正規確率場の逐次型同定アルゴリズム

t 番目のデータセットに対し、正規確率場の状態量（総数 L）を $X_t = (x_{t1},\cdots,x_{tL})^T$、非正規確率場の観測量（総数 N）を $Y_t = (y_{t1},\cdots,y_{tN})^T$ とすると、状態方程式と観測方程式はおのおの

$$X_t = f(X_{t-1}, t-1) + w_{t-1} \tag{1}$$

$$Y_t = g(X_t, t) + v_t \tag{2}$$

で表せる。ここで、$f(X_{t-1}, t-1)$ は状態量の更新過程を示す非線形なベクトル関数、$g(X_t, t)$ は状態量と観測量の関係を表す非線形なベクトル関数、w_{t-1} はシステムノイズ、v_tは観測ノイズである。システムノイズと観測ノイズはホワイトノイズで表す。

条件付非正規確率場の同定問題を取り扱うために、まず、これを正規確率場に変換する。変換された正規確率場の無条件平均値$\widehat{X}_{0|0}$と無条件共分散 $P_{0|0}$を初期値とし、条件付正規確率場での同定を行う。拡張カルマンフィルタを適用すると、正規確率場における最適推定値$\widehat{X}_{t|t}$と推定誤差共分散 $P_{t|t}$が得られる。不偏性を満足するように、これらを非正規確率場に変換する。このためには

$${}_i\widehat{Y}_{t|t} = {}_ih({}_i\widehat{X}_{t/t}) \tag{3}$$

による逆変換でなく、下記に示す式(4)、(5)の変換式を用いなければならない。

ここでは対象確率場を対数正規確率場とするので、式(3)の $h(\cdot)$ は指数関数となる。すると、最適推定値$\widehat{Y}_{t|t}$と推定誤差分散$\widehat{P}_{t|t}$は、おのおの、次式の逆変換式によって表せる[1)]。

$${}_i\widehat{Y}_{t/t} = \exp\left[{}_i\widehat{X}_{t/t} + \frac{1}{2}P_{t/t}\right] \tag{4}$$

$${}_i\widehat{P}_{t/t} = \left(E\left[Y_{0/0}\right]\right)^2 \exp\left[{}_iP_{0/0}\right]\left(1 - e^{-{}_iP_{t/t}}\right) \tag{5}$$

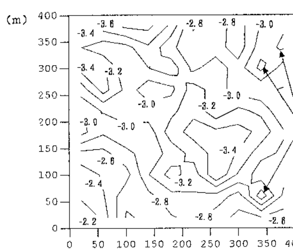


図1　設定した分散係数の対数値の空間分布

3. 汚染物質輸送モデルの同定法

非定常状態の汚染物質輸送の支配方程式は、平面2次元状態を仮定すると、有限要素法によって定式化できる。その際、領域の空間的な離散化に加え、時間に関しても離散化を施し、漸化式として表す。解析領域の境界条件により、その漸化式を未知量と既知量にわける。このとき、時刻 $t+1$ の未知濃度 c^1_{t+1}と未知流量 q^2_{t+1} は

$$c^1_{t+1} = \left[A^{11}\right]^{-1}\left[B^{11}c^1_t + B^{12}c^2_t - A^{12}c^2_{t+1} + q^1_{t+\theta}\right] \tag{6}$$

$$q^2_{t+1} = \frac{1}{\theta}\left[A^{21}c^1_{t+1} + A^{22}c^2_{t+1} - B^{21}c^1_t - B^{22}c^2_t - (1-\theta)q^2_t\right] \tag{7}$$

で求められる。ここで、A と B は漸化式の係数行列である。各上添字は未知濃度と既知濃度に対応する項を表す。時刻 $t+1$ での既知濃度 c^2_{t+1} と既知流量 $q^1_{t+\theta}$ は境界条件で与えられる。これより、時刻 t の濃度 c^1_t と流量 q^2_t から、時刻 $t+1$ での未知濃度 c^1_{t+1} と未知流量 q^2_{t+1}の時間更新が行われる。

本研究で提案する同定法においては、状態量を未知濃度 c^1、分散係数の常用対数をとった値 $L(=\log D)$、未知流量 q^2とする。最終的に、式(1)の状態方程式と式(2)の観測方程式は次のようになる。

$$X_{t+1} = \left\{\begin{array}{c} c^1_{t+1} \\ L_{t+1} \\ q^2_{t+1} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} f^c_t(X_t) \\ L_t \\ f^q_t(X_t) \end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{c} w^c_t \\ w^L_t \\ w^q_t \end{array}\right\} \tag{8}$$

$$Y_t = \left\{\begin{array}{c} \bar{c}_t \\ \bar{D}_t \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} g^c_t(X_t) \\ g^L_t(X_t) \end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{c} v^c_t \\ v^L_t \end{array}\right\} \tag{9}$$

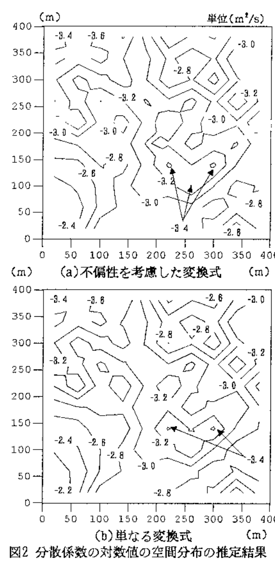


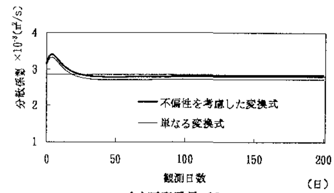
図2 分散係数の対数値の空間分布の推定結果

条件付確率場　地下水汚染物質　輸送モデル　拡張カルマンフィルタ　同定

〒550-0012 大阪市西区立売堀1丁目4番12号　TEL(06)532-6251　FAX(06)533-0710
〒680-0945 鳥取県鳥取市湖山町4-101　TEL(0857)31-5307　FAX(0857)31-0882

ここで、時刻 $t+1$ での未知濃度 c^1_{t+1} と未知流量 q^2_{t+1} は式 (6) と式 (7) で求められる。なお、分散係数に関しては時間的変化がないものと仮定する。$\bar{c}_t$ と $\bar{D}_t$ は、それぞれ、濃度と分散係数の観測値である。

状態方程式 (8) と観測方程式 (9) を基にすると、先に述べた同定アルゴリズムより、観測値から、状態量の推定と更新が逐次行われる。その結果、最終的に、分散係数と濃度の推定値が得られる。



(a)要素番号 10

図3 分散係数の推定値の時系列変化

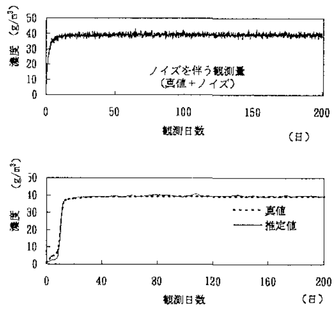
4. 数値計算結果および考察

(1) 前提条件

本手法の妥当性を検討するため、平面 2 次元の汚染物質輸送モデルに対する分析を行う。ここでは分散係数を等方性と仮定する。その空間分布特性として、平均値は $10^{-3}m^2/s$ 、共分散関数は $C(d)=\sigma^2\exp[-d/100](\sigma^2=10^{-6})$ である。空間分布モデルはシミュレーションによって図 1 のように作成した。

濃度の模擬観測データは、解析モデルの $x=120m,y=120m$ の点から $100g/m^3$ の汚染物質が 200 日間流出しているものとして、有限要素法の順解析により求めた。

状態量は、未知濃度 100 点、分散係数 100 点、未知流量 21 点の計 221 である。観測量としては、濃度 50 点と分散係数 25 点の計 75 の場合 (タイプ 1)、濃度 13 点と分散係数 4 点の計 17 点の場合 (タイプ 2) を考えた。



(a)節点番号25

図4 濃度の推定値の時系列変化

(2) タイプ 1 の場合

分散係数の空間分布は図 2 のようである。図 2 (a) は式 (4) から、図 2 (b) は式 (3) から求めた。両図とも、全体的には真値の図 1 を表しているが、本提案方法による図 (a) の方がより図 1 の設定値に近いことがわかる。図 3 には要素 10 における分散係数の推定値の時間変化を示した。同図からも本方法がより真値に近い値を与えていると言える。図 4 は、ある観測点での濃度の時間変化の例である。ノイズに伴う誤差は見られるが、真値とほぼ一致していることが理解できる。

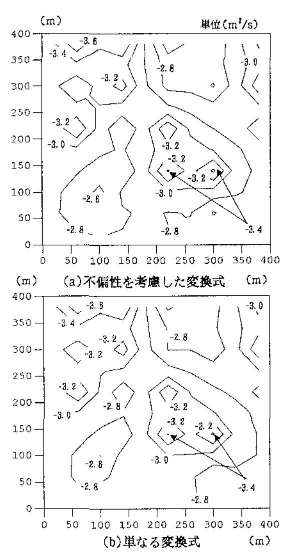
以上より、比較的十分な観測データを有すると、分散係数や濃度の時空間分布の推定精度は高い。

(3) タイプ 2 の場合

分散係数の推定空間分布は図 5 のようになり、十分な推定結果が得られなかった。これは、観測点が 17 と少なく、パラメータを推定するのに十分な情報がないためである。ただし、図 5 の (a)、(b) を比較すると、本手法による結果の方が設定値に近いことがわかる。図 6 の分散係数の推定値の時間変化 (要素 3) より、不偏性を考慮した式 (4) と単なる変換式 (3) の差異は明確である。

未観測点の濃度の時間的変化は図 7 のようになる。図 (a) によると、節点番号 97 では観測開始 100 日付近で真値との差が最も大きく、以後観測が増えるに従って真値に近づいている。また、図 (b) においても観測回数が増えるにつれて真値に近づいていることがわかる。

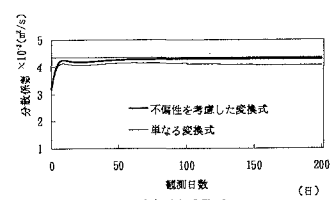
この結果より、観測データ数が少ないと、要素分割を細かくした上で、比較的真値に近い推定値を与える濃度を状態量に取り込むことにより、解の不安定性が解消でき、分散係数をよりよく推定できるものと考えられる。



(a)不偏性を考慮した変換式

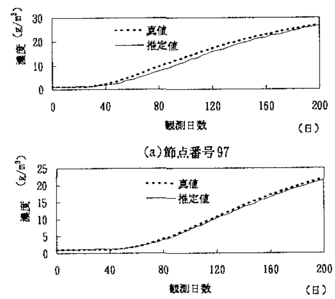
(b)単なる変換式

図5 分散係数の対数値の空間分布の推定結果



(a)要素番号 3

図6 分散係数の推定値の時系列変化



(a)節点番号97

(b)節点番号121

図7 濃度の推定値の時系列変化

5. おわりに

本研究では、地下水汚染物質輸送の主要なパラメータである分散係数を対数正規確率場として、汚染物質輸送の支配方程式と条件付非正規確率場の逐次型同定法をハイブリッドした推定方法を提案した。その際、対数正規確率場と正規確率場の関係から、不偏性を考慮した上で、対数正規確率場への変換式 (4) を採用した。本手法を平面 2 次元非定常の汚染物質輸送モデルに適用した結果、本手法で採用した変換式を用いると、より設定値に近い分散係数の空間分布を推定できることがわかった。

参考文献

1) 長舟　健・野田　茂・星谷　勝：条件付非正規確率場の逐次型同定, 土木学会第 49 回年次学術講演会講演概要集, 第 1 部 (B),　pp.1438〜1439,　1994 年 9 月.