

VI-355

観測鉾を用いた新三次元土木計測システムの計測理論

パスコ

正会員 三島 研二

日本鉄道建設公団 正会員 米澤 豊司

日本鉄道建設公団 正会員 坂井 五郎

同上 正会員 北川 修三

同上 正会員 小幡 芳文

はじめに

本システムは、トランシット1台と測点を兼ねた観測鉾を用い、測角のみで測点の三次元座標を求める新しい計測システムである。

従来トンネルなどで用いられている三次元土木計測システムは、大きく二つに分類される。一つは、2台のトランシットと基線（サブテンスバー）を用いて、測角のみで測点の三次元座標を求める方法¹⁾である。これは、青函トンネルにおいて開発されたもので、実際の複線鉄道トンネル内空断面での測定精度（標準偏差）は、 $\pm 0.2\text{mm}$ 程度と精度は高い。しかし、使用機器類が多く、やや機動性に欠ける。もう一つの方法は、光波測距儀とトランシットを結合させたシステムを用いて、距離と測角を同時に行うことで座標を求める方法²⁾である。実際の測定精度は、 $\pm 0.3 \sim \pm 0.5\text{mm}$ 程度と前者に比べやや大きいようである。

本システムは、従来システムに対して、計測作業の省力化とシステム全体の経済性を図ることを目的として開発したものである。本論では計測理論を述べ、文献³⁾において各種観測条件下での試験結果から測定精度を示し、本システムの有効性を検証する。

1 概要

図-1に示すように、任意位置に据付けたトランシットを空間座標原点とし、空間上に P_1, P_2, P_3, P_4 の4頂点を有した観測鉾が存在するものとする。それぞれの頂点間距離は、 $a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{24}, a_{23}, a_{34}$ として与えられている。座標原点からの距離を $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4$ とする。観測によって得られる結果として、 α, β, γ が各頂点ごとに求まる。これらの与えられた立体幾何条件を解くと、 $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4$ が求められ、4頂点の三次元座標値を得ることができる。なお、代表させる測点座標は、例えば観測鉾の底面を構成する3頂点の重心座標とすることもできる。

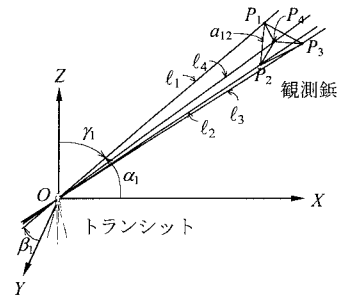


図-1 トランシットと観測鉾の関係

2 計測理論

図-1において、4直線 $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4$ の方向余弦は

$$\begin{cases} \lambda_1 = \cos \alpha_1 \\ \mu_1 = \cos \beta_1 \\ \nu_1 = \cos \gamma_1 \end{cases}, \begin{cases} \lambda_2 = \cos \alpha_2 \\ \mu_2 = \cos \beta_2 \\ \nu_2 = \cos \gamma_2 \end{cases}, \begin{cases} \lambda_3 = \cos \alpha_3 \\ \mu_3 = \cos \beta_3 \\ \nu_3 = \cos \gamma_3 \end{cases}, \begin{cases} \lambda_4 = \cos \alpha_4 \\ \mu_4 = \cos \beta_4 \\ \nu_4 = \cos \gamma_4 \end{cases}$$

である。ここで、 $\begin{cases} \alpha = \cos^{-1}(\cos A \cdot \sin B) \\ \beta = \cos^{-1}(\sin A \cdot \sin B) \\ \gamma = B \end{cases}$ 。ただし、 A は観測水平角、 B は観測鉛直角である。求める直線上

の点 P_1, P_2, P_3, P_4 は $P_1(\ell_1 \cdot \lambda_1 + x_0, \ell_1 \cdot \mu_1 + y_0, \ell_1 \cdot \nu_1 + z_0)$, $P_2(\ell_2 \cdot \lambda_2 + x_0, \ell_2 \cdot \mu_2 + y_0, \ell_2 \cdot \nu_2 + z_0)$, $P_3(\ell_3 \cdot \lambda_3 + x_0, \ell_3 \cdot \mu_3 + y_0, \ell_3 \cdot \nu_3 + z_0)$, $P_4(\ell_4 \cdot \lambda_4 + x_0, \ell_4 \cdot \mu_4 + y_0, \ell_4 \cdot \nu_4 + z_0)$ となるが、 x_0, y_0, z_0 は座標原点でいずれも零であるから、 $P_1(\ell_1 \cdot \lambda_1, \ell_1 \cdot \mu_1, \ell_1 \cdot \nu_1)$, $P_2(\ell_2 \cdot \lambda_2, \ell_2 \cdot \mu_2, \ell_2 \cdot \nu_2)$, $P_3(\ell_3 \cdot \lambda_3, \ell_3 \cdot \mu_3, \ell_3 \cdot \nu_3)$, $P_4(\ell_4 \cdot \lambda_4, \ell_4 \cdot \mu_4, \ell_4 \cdot \nu_4)$ となる。さて、方向余弦が λ_1, μ_1, ν_1 の有向直線 g_1 と、方向余弦が λ_2, μ_2, ν_2 である有向直線 g_2 の間の角 θ を与える公式は、 $\cos \theta = \lambda_1 \cdot \lambda_2 + \mu_1 \cdot \mu_2 + \nu_1 \cdot \nu_2$ であるから、それぞれの直線がなす角は、 $\cos \theta_{12} = \lambda_1 \cdot \lambda_2 + \mu_1 \cdot \mu_2 + \nu_1 \cdot \nu_2$, $\cos \theta_{13} = \lambda_1 \cdot \lambda_3 + \mu_1 \cdot \mu_3 + \nu_1 \cdot \nu_3$, $\cos \theta_{14} = \lambda_1 \cdot \lambda_4 + \mu_1 \cdot \mu_4 + \nu_1 \cdot \nu_4$, $\cos \theta_{24} = \lambda_2 \cdot \lambda_4 + \mu_2 \cdot \mu_4 + \nu_2 \cdot \nu_4$ となる。三次元計測システム、測量、変位測定、トンネル、

$v_2 \cdot v_4$, $\cos \theta_{23} = \lambda_2 \cdot \lambda_3 + \mu_2 \cdot \mu_3 + v_2 \cdot v_3$, $\cos \theta_{34} = \lambda_3 \cdot \lambda_4 + \mu_3 \cdot \mu_4 + v_3 \cdot v_4$ で与えられる. 三角形 OP_1P_2 に第二余弦定理をあてはめれば, $\overline{P_1P_2}^2 = \overline{OP_1}^2 + \overline{OP_2}^2 - 2 \cdot \overline{OP_1} \cdot \overline{OP_2} \cdot \cos \theta_{12}$ となり, $\overline{P_1P_2}$ は4頂点を有する立体図形の一辺 a_{12} と等しい. 同様に原点 O と各頂点とからなる全ての三角形に, 第二余弦定理をあてはめれば(1)式を得る.

$$\begin{cases} \overline{P_1P_2}^2 = \ell_1^2 + \ell_2^2 - 2\ell_1 \cdot \ell_2 \cdot \cos \theta_{12} = a_{12}^2 \\ \overline{P_1P_3}^2 = \ell_1^2 + \ell_3^2 - 2\ell_1 \cdot \ell_3 \cdot \cos \theta_{13} = a_{13}^2 \\ \overline{P_1P_4}^2 = \ell_1^2 + \ell_4^2 - 2\ell_1 \cdot \ell_4 \cdot \cos \theta_{14} = a_{14}^2 \\ \overline{P_2P_4}^2 = \ell_2^2 + \ell_4^2 - 2\ell_2 \cdot \ell_4 \cdot \cos \theta_{24} = a_{24}^2 \\ \overline{P_2P_3}^2 = \ell_2^2 + \ell_3^2 - 2\ell_2 \cdot \ell_3 \cdot \cos \theta_{23} = a_{23}^2 \\ \overline{P_3P_4}^2 = \ell_3^2 + \ell_4^2 - 2\ell_3 \cdot \ell_4 \cdot \cos \theta_{34} = a_{34}^2 \end{cases} \quad (1), \quad \begin{cases} \ell_1^2 + \ell_4^2 - 2\ell_1 \cdot \ell_4 \cdot \cos \theta_{14} - a_{14}^2 = 0 \\ \ell_2^2 + \ell_4^2 - 2\ell_2 \cdot \ell_4 \cdot \cos \theta_{24} - a_{24}^2 = 0 \\ \ell_1^2 + 2\ell_2^2 - \ell_3^2 - 4\ell_1 \cdot \ell_2 \cdot \cos \theta_{12} + 2\ell_1 \cdot \ell_3 \cdot \cos \theta_{13} - 2a_{12}^2 + a_{13}^2 = 0 \\ 2\ell_2^2 + \ell_3^2 - \ell_4^2 - 4\ell_2 \cdot \ell_3 \cdot \cos \theta_{23} + 2\ell_3 \cdot \ell_4 \cdot \cos \theta_{34} - 2a_{23}^2 + a_{34}^2 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

(1)式で, 求める変数は, $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4$ である. これを方程式として解くために, 式と変数の数を一致させると(2)式の4元連立非線形方程式が得られる. (2)式の解を得るには, コンピュータを用いて, 例えば繰り返し計算法の一つである Newton-Raphson 法で解くことができる. この場合の反復式は, $\mathbf{l}_{k+1} = \mathbf{l}_k - \mathbf{G}(\mathbf{l}_k)^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{l}_k)$

(3). ここに, $\mathbf{f}(\mathbf{l})$ は, (2)式のベクトル関数を表わす. $\mathbf{G}(\mathbf{l})$ は, $\mathbf{f}(\mathbf{l})$ の偏微分係数ベクトル関数を表わし,

$$\mathbf{G}(\mathbf{l}) = \begin{pmatrix} 2(\ell_1 - \ell_4 \cdot \cos \theta_{14}) & 0 & 0 & 2(\ell_4 - \ell_1 \cdot \cos \theta_{14}) \\ 0 & 2(\ell_2 - \ell_4 \cdot \cos \theta_{24}) & 0 & 2(\ell_4 - \ell_2 \cdot \cos \theta_{24}) \\ 2(\ell_1 - 2\ell_2 \cdot \cos \theta_{12} + \ell_3 \cdot \cos \theta_{13}) & 4(\ell_2 - \ell_1 \cdot \cos \theta_{12}) & 2(\ell_1 \cdot \cos \theta_{13} - \ell_3) & 0 \\ 0 & 4(\ell_2 - \ell_3 \cdot \cos \theta_{23}) & 2(\ell_3 - 2\ell_2 \cdot \cos \theta_{23} + \ell_4 \cdot \cos \theta_{34}) & 2(\ell_3 \cdot \cos \theta_{34} - \ell_4) \end{pmatrix} \quad (4)$$

である. k は反復数である. 収束判定は, (5)式のようにベクトル $\mathbf{l}_k$ の各要素に対する相対誤差が許容相対誤差 ε 以内になるまで反復させる. 相対誤差で判定したのは, 解の有効桁数まで指定するためである.

$$\left| \frac{\ell_i^{(k+1)} - \ell_i^{(k)}}{\ell_i^{(k+1)}} \right| \leq \varepsilon \quad (i=1, 2, 3, 4) \quad (5). \quad \text{なお, この式の変数の右肩括弧は反復回数を表わす.}$$

3 代表した測点座標値

得られた観測値の P_1, P_2, P_3, P_4 の各点の座標値から, 一つの測点座標値に表現してみる. ここでは観測値を設置する対象構造物等の表面形状が曲面となることを想定し, 図-2 に示すように観測値の底面部分の重心点の投影点が求めようとする構造物等の測点と一点で接する場合を考える. このとき, 同図の距離 a を既知とすれば, 点 P_6 の座標は, 線分 P_4P_5 を $m:n$ に外分する公式で求めることができるので,

$$P_6 \left(\frac{m \cdot x_5 - n \cdot x_4}{m-n}, \frac{m \cdot y_5 - n \cdot y_4}{m-n}, \frac{m \cdot z_5 - n \cdot z_4}{m-n} \right)$$

となる. ここで, P_5 の座標値は, 三角形 P_1, P_2, P_3 の重心座標であり, 次式で与えられる.

$$x_5 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad y_5 = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \quad z_5 = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}$$

参考文献

- 1) 下河内・登坂・三島: 三次元計測システムによるトンネル内空断面測定, トンネルと地下, Vol-19, pp.39-44, 1988.11.
- 2) 鍛冶・田中・古川・中川: 山岳トンネルにおける新しい計測方法の開発とその適用, 土木学会論文集 No.486, VI-22, pp.115-124, 1994.3.
- 3) 大山・米澤・北川・新山・井上: 観測値を用いた新三次元土木計測システムの測定精度, 土木学会第53回年次学術講演会, 1998.10.

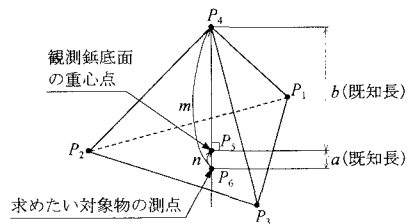


図-2 観測値と測点座標