土木学会第53回年次学術講演会（平成10年10月）

IV - 208

誤差項における空間的自己相関に対する適切化手法の適用が分散不均一に及ぼす影響*

東京大学大学院　学生会員　井出 裕史**
東京大学大学院　正会員　堤 盛人
東京大学大学院　正会員　清水 英範

1. はじめに

地域を対象としたモデル分析では、取り扱うデータの多くが空間に広がったデータであるため、誤差項どうしが相関をもつ空間的自己相関や、分散が観測点により不均一になる分散不均一などの問題が生じる。これらの問題を無視すると、モデル分析による政策判断の信頼性が低下するため、多くの改善手法 1)~4)が提案されてきた。しかし、空間的自己相関と分散不均一は共に誤差項の仮定に関する問題であるにも関わらず、それらが同時に扱われることは意外に少ない。そこで本研究では、空間的自己相関の改善手法として提案されてきた手法が、分散不均一にどのような影響をもたらすかを、実証データを用いて考察する。

2. 空間的自己相関と分散不均一

空間的自己相関や分散不均一が存在すると、例えば単純な線形回帰式

$$y = X\beta + \varepsilon \qquad (1)$$

における通常最小二乗法(Ordinary Least Squared method : OLS)の仮定

$$E(\varepsilon) = 0,\ \ Var(\varepsilon) = \sigma^2 I \qquad (2)$$

が成り立たず推定結果の信頼性が損なわれる。もし誤差項の分散共分散行列 Q の構造が既知であれば、一般化最小二乗法(Generalized Least Squared method : GLS)

$$\beta = (X'Q^{-1}X)^{-1}X'Q^{-1}y \qquad (3)$$

等により信頼性のある推定値が得られる。しかし Q の構造が既知であることは希であるため、何らかの前提のもとでモデル化を変更する必要がある。

2−1. 空間的自己相関の改善手法

そこで、空間的自己相関の原因となる誤差項同士の関係を仮定し定式化することにより、線形回帰式(1)に対し以下の(a)～(e)のような様々なモデルが提案されている。1)~4)

(a) $y = \rho Wy + X\beta + u$ (4)

(b) $y = X\beta + WX\gamma + u$ (5)

(c) $y = X\beta + \varepsilon,\ \ \varepsilon = (I - \lambda W)^{-1}u$ (6)

(d) $y = X\beta + \varepsilon,\ \ \varepsilon = (I + \lambda W)u$ (7)

(e) $y = X\beta + \varepsilon,\ \ \varepsilon = Wv + u$ (8)

ただし、ρ,λ:パラメータ

$u \sim N(0,\sigma_u^2 I),\ \ v \sim N(0,\sigma_v^2 I)$

W:重み行列　$w_{ij} = [1/d_{ij}^{\ \alpha}]$

d_{ij} :地点 i,j 間の距離, α:パラメータ

このうち(c),(d),(e)は誤差修正モデル(Error Correction Model : ECM)と呼ばれる。

2−2. 分散不均一の改善手法

一方、分散不均一の改善手法としては、

①誤差項の分散を説明変数xの和、積で回帰する(ε_i^2をσ_i^2の代理変数とみなす)

$$\sigma_i^2 = \sum \alpha_j Z_{ij} \quad ただし、 Z_{ij} = f(x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ik}) \qquad (9)$$

②Box-Cox 変換により変数変換を行なう

等の方法がよく用いられる。

2−3. 空間的自己相関改善手法の分散不均一への影響

2-1で述べた改善手法(a)～(e)のうち、ECM(c),(d),(e)における誤差項の分散共分散行列は、

$$Var(\varepsilon) = \sigma_u^2[(I - \lambda W)'(I - \lambda W)]^{-1} \qquad (10)$$

$$Var(\varepsilon) = \sigma_u^2[(I + \lambda W)'(I + \lambda W)] \qquad (11)$$

$$Var(\varepsilon) = \sigma_v^2 W'W + \sigma_u^2 I \qquad (12)$$

と構造化される。Anselin[1]においては、ECM は分散不均一の改善手法の1つとして述べられている。実際手法(b)を

(b)'　$y = X\beta + e,\ \ e = WX\gamma + u$ (13)

とすると、(b)'の誤差項eは

$$e_i = \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{k} w_{iq} x_{qp} \gamma_p \qquad (14)$$

のように誤差項は説明変数の線形和となる。これは、分散不均一の改善手法①において Z_{ij} を説明変数の 2 次形式で記述したものと同じになる。

3. 空間的自己相関改善手法の適用が分散不均一に与

キーワード：地域分析、空間的自己相関、分散不均一、実証比較
連絡先：東京大学大学院　工学系研究科　社会基盤工学専攻
〒113-8656　東京都文京区本郷 7-3-1　TEL 03-3812-2111(内線 6129)

える影響

3－1. 使用モデルとデータ

ここでは(15)式のような線形回帰式を用いた。

$$y = \beta_0 + \sum_{i=1}^{5} x_i \beta_i \tag{15}$$

データは東京都足立区内公示地価点[平成 8 年度]のうち東武伊勢崎線を最寄り駅とする全 52 点である。

<表.1 モデルに用いた変数>

y	公示地価(円／m^2)
x_1	土地面積(m^2)
x_2	最寄り駅までの距離(m)
x_3	最寄り駅から北千住までの時間(分)
x_4	容積率(%)
x_5	大規模店舗までの距離(m)

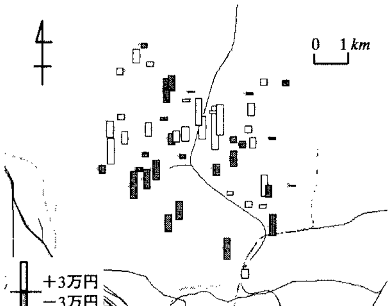
3－2. 各手法による推定結果

空間的自己相関を無視したOLSおよび2-1で述べた(a)～(e)の空間的自己相関改善手法に、最尤法を用いて推定を行なった結果は以下の通りである。(重み行列についてはα=2 とした)

<表.2 パラメータ推定結果>

	OLS	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
$\beta_0(\times 10^5)$	3.11	1.44	2.18	3.19	3.23	3.04
β_1	204	168	243	114	130	129
β_2	-25.0	-17.8	-20.8	-323	-30.9	-28.3
$\beta_3(\times 10^3)$	-2.49	-1.74	0.260	-1.62	-1.88	-1.06
β_4	233	220	246	224	219	258
β_5	-1.22	-1.25	-6.82	6.78	4.40	3.70
γ_1			940			
γ_2			34			
$\gamma_3(\times 10^4)$			-1.60			

OLS 推定による残差には、以下のプロット図に示されるように空間的な偏り、すなわち空間的自己相関が存在する。



<図.1 残差プロット>

表. 2 において、β_3 の推定値は OLS では有意であったものが空間的自己相関を改善すると有意でなくなっている。これは、空間的自己相関が存在するにも関わらずそれを無視して推定を行うと、誤った政策判断をする可能性があることを示唆している。

3－3. 改善結果

空間的自己相関および分散不均一の指標として一般的に用いられる Moran の I 統計量[5]および GK 統計量を用いて、OLS および空間的自己相関の改善手法を適用した結果を比較すると表. 3のようになる。

・Moran の I 統計量

$$I = \frac{N}{S}\frac{\varepsilon' W \varepsilon}{\varepsilon' \varepsilon} \tag{16}$$

ただし、 ε:OLS 残差, N:データ数

S:重み行列の全要素の和

・ GK 統計量

$$GK = \frac{n\left\{\sum (y_i - \bar{y})e_i^2\right\}^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2 \sum (e_i^2 - \bar{e}^2)^2} \tag{17}$$

ただし、 n:観測点数, $\bar{y}, \bar{e}$:平均値

<表.3 各モデルによる Moran 統計量と GK 統計量>

	OLS	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
Moran	4.24	2.19	2.84	0.94	1.59	*
GK	3.83	2.00	1.51	3.93	4.38	5.58

(* 2 種類の誤差項を使用するため計算できない。)

表.3 より、 (a)～(e)の空間的自己相関改善手法はどの手法も OLS に比べ Moran の値が小さくなり、空間的自己相関が改善されていることがわかる。例えば OLS では空間的自己相関が存在しないという帰無仮説が有意水準 5%で棄却されたのに対し、(c)を適用すると 30%でも棄却されない。また(a),(b)では GK 統計量が OLS に比べ小さくなり分散不均一も解消されている。例えば OLS では均一分散の帰無仮説が有意水準 5%で棄却されたのに対し、(b)を適用すると 20%でも棄却されない。しかし、(c)～(e)のように GK 統計量が OLS に比べ大きくなり、分散不均一をまったく解消しないものもある。

4. おわりに

空間的自己相関の改善手法が分散不均一に与える影響を、実際のデータを用いて考察した。本論文ではたかだか 1 組のデータセットのみの適用であり、今後、各空間的自己相関の改善手法が分散共分散行列に対しいかなる影響を与えているかを、理論的な枠組みの中で明確にしたい。

【参考文献】

1) Anselin, L. : Spatial Econometrics:Methods and Models, Kluwer Academic, 1988
2) Florax, R.J.G.M. and Folmer, H.: Regional Science and Urban Economics, Vol.22, pp.405-432, 1992.
3) Anselin, L. and Florax, R.J.G.M.: New Directions in Spatial Econometrics, Springer, pp.21-74, 1995
4) Kelejian, H. and Robinson, D.: Regional Science, Vol.72, pp.297-312, 1993.
5) Cliff A.D. and Ord J.K. : Spatial Autocorrelation, 1973