

Ⅲ - B 425

硬化型異方性降伏関数の定式化と実験的考察

法政大学大学院 学生会員 高橋 寛
 法政大学 正会員 草深 守人
 法政大学大学院 学生会員 兼重 剛

1. はじめに:

静水圧依存の降伏関数として広く用いられている代表的なものの一つに等方性材料に対する Drucker-Prager の降伏関数があり、異方性材料に対しては Tsai や Pariseau の降伏関数などが提案されている。本研究では、岩盤材料のように複雑な強度異方性を示す材料に対してもその適用範囲を広げるために、従来の基本的な降伏関数の自然な拡張としての新たな静水圧依存型の降伏関数を提案する。また、降伏関数に現れる材料パラメータの物理的意味が明確で、かつその決定に特別な材料試験を必要としないよう配慮した。

2. 異方性降伏関数:

異方性の影響が降伏関数を表す応力空間の基底に現れるものとした異方性降伏関数が、下式のように示されている。(圧縮を正とする。)

$$f = \left[(b_1\sigma'_{11} - b_2\sigma'_{22})^2 + (b_2\sigma'_{22} - b_3\sigma'_{33})^2 + (b_3\sigma'_{33} - b_1\sigma'_{11})^2 + b_4^2\sigma'^2_{12} + b_5^2\sigma'^2_{23} + b_6^2\sigma'^2_{31} \right]^{1/2} - a_1b_1\sigma'_{11} + a_2b_2\sigma'_{22} + a_3b_3\sigma'_{33} \quad (1)$$

$$= 1$$

これをマトリックス表示すると、次のように表せる。

$$f = \sqrt{\{\sigma'\}^T [B] \{\sigma'\} - \{A\}^T \{\sigma'\}} = 1 \quad (2)$$

ここで、式(2)の各係数は次の通りである。

$$\{A\}^T = \{a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3, 0, 0, 0\} \quad (3)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} 2b_1^2 & -b_1b_2 & -b_1b_3 & 0 & 0 & 0 \\ -b_2b_1 & 2b_2^2 & -b_2b_3 & 0 & 0 & 0 \\ -b_3b_1 & -b_3b_2 & 2b_3^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_4^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_5^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_6^2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

3. 降伏関数の座標変換: 式(1)または式(2)の降伏関数は、材料座標系(図1)で表示したものであり、有限要素解析プログラムに組み込むためには全体座標系に変換する必要がある。応力の座標変換マトリックスを $[T_\sigma]$ とすると、全体座標系における応力 $\{\sigma\}$ は次のように表される。

$$\{\sigma'\} = [T_\sigma] \{\sigma\} \quad (5)$$

上式を式(2)に代入することにより、全体座標系の降伏関数は次のようになる。

$$f = \sqrt{\{\sigma\}^T [T_\sigma]^T [B] [T_\sigma] \{\sigma\} - \{A\}^T [T_\sigma] \{\sigma\}} = 1 \quad (6)$$

ここで、材料座標系での材料マトリックスを $\{A\}, [B]$ とし、

全体座標系での異方性マトリックスを $\{\bar{A}\}, [\bar{B}]$ とし、次のように置く。

$$[\bar{B}] = [T_\sigma]^T [B] [T_\sigma] \quad (7)$$

$$\{\bar{A}\}^T = \{A\}^T [T_\sigma] \quad (8)$$

したがって、全体座標系での降伏関数は次のように表される。

$$f = \sqrt{\{\sigma\}^T [\bar{B}] \{\sigma\} - \{\bar{A}\}^T \{\sigma\}} = \sqrt{\bar{J}_{2D}} - \bar{J}_1 = 1 \quad (9)$$

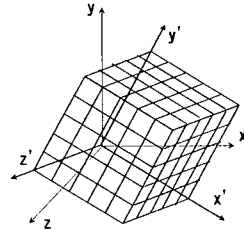


図1: 材料座標系と全体座標系

4. 硬化型異方性降伏関数:

完全塑性材料に対する式(9)の降伏関数を、硬化型異方性降伏関数として拡張する。ここで、式(9)は正規化されたものであり、正規化する前の降伏関数は次のように表せる。

$$F = \left[(\beta_1\sigma_{11} - \beta_2\sigma_{22})^2 + (\beta_2\sigma_{22} - \beta_3\sigma_{33})^2 + (\beta_3\sigma_{33} - \beta_1\sigma_{11})^2 + \beta_4^2\sigma_{12}^2 + \beta_5^2\sigma_{23}^2 + \beta_6^2\sigma_{31}^2 \right]^{1/2} - \bar{a}_1\beta_1\sigma_{11} + \bar{a}_2\beta_2\sigma_{22} + \bar{a}_3\beta_3\sigma_{33} \quad (10)$$

$$= \sqrt{\bar{J}_{2D}} - \bar{J}_1$$

$$= \kappa_c$$

応力状態 σ_{ij} を単軸応力状態の応力 σ_i と等価にさせた応力を、ここでは $\bar{\sigma}_i$ とすると、式(9)の相当応力は、次のようになる。

$$\bar{\sigma}_i = \frac{\sqrt{\bar{J}_{2D}} - \bar{J}_1}{\beta_i (\sqrt{2} - \bar{a}_i)}; \quad (i = 1 \sim 3) \quad (11)$$

また、相当塑性ひずみ $\bar{\varepsilon}_{pi}$ は相当応力と相当塑性ひずみによる塑性仕事 $\bar{\sigma}_i d\bar{\varepsilon}_{pi}$ が、実際の塑性仕事 $dW^p = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p$ と等価な量となるような量で、式(9)の相当塑性ひずみが、式で与えられる。

$$d\bar{\varepsilon}_{pi} = \frac{\beta_i (\sqrt{2} - \bar{a}_i)}{\sqrt{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}}} \cdot \sqrt{d\varepsilon_{ij}^p d\varepsilon_{ij}^p} \quad (12)$$

降伏後の相当応力-相当塑性ひずみ曲線の傾きを H' とすると、ひずみ硬化を考慮した相当応力は相当塑性ひずみの関数として次式のように表せる。

$$\bar{\sigma}_i = \frac{1}{\beta_i (\sqrt{2} - \bar{a}_i)} \kappa_c + H' \int d\bar{\varepsilon}_{pi} \quad (13)$$

したがって、硬化型異方性材料の降伏関数は、式(11)を式(13)に代入することによって、次式のように与えることができる。

$$F(\sigma_{ij}, \bar{\varepsilon}_{pi}) = \sqrt{\bar{J}_{2D} - \bar{J}_1} - \left\{ \kappa_c + \beta_i (\sqrt{2} - \bar{a}_i) H' \int d\bar{\varepsilon}_{pi} \right\} \quad (14)$$

または、正規化することにより次式のような表現も与えられる。

$$f(\sigma_{ij}, \bar{\varepsilon}_{pi}) = \sqrt{\bar{J}_{2D} - \bar{J}_1} - \left\{ 1 + \bar{b}_i (\sqrt{2} - \bar{a}_i) H' \int d\bar{\varepsilon}_{pi} \right\} \quad (15)$$

5. 解析結果と実験値の比較・考察:

層理面を含む成層異方性材料の三軸圧縮試験と有限要素解析結果の比較例を図2、図3に示す。式(15)を用いた解析結果は、実験値を定量的にも定性的にもよく表現している。また、実験によると層理角と強度の大小関係が、拘束圧の上昇にともない、移動する現象が見られた。このことは、異方性材料の降伏関数を表す π 平面が静水圧応力成分の影響を受けることを意味している。今回提案した降伏関数も、 π 平面は静水圧応力に依存するものであり、実験的に確認された上記での現象を良く表現している。図4は、全体座標系で計った応力-ひずみ曲線の計算結果を示したものであり、材料座標系は全体座標系に対し回転（層理角 θ の変化）させている。明らかに層理角の変化によってひずみ硬化率も変化し、ひずみ硬化特性についても異方性の表現が可能であることがわかる。

6. あとがき:

本研究では、等方性から大きな異方性までを統一的に表現できる静水圧依存型降伏関数を、ひずみ硬化を考慮した硬化型異方性降伏関数へ拡張し、定式化した。さらにこの構成方程式を用いた数値計算結果が、三軸試験などで計測される強度や異方性に関する主要な特性を再現していることを示した。今後は、実際問題への適用や現場計測値との比較・検討を行うことにより、その妥当性・問題点などを改善していく必要がある。

[参考文献]

- 1) W.F. Chen and D.J. Han, *Plasticity for Structural Engineers*, Springer-Verlag, New York, 1988.
- 2) C.S. Dsai and H.J. Siriwardane, *CONSTITUTIVE LAWS FOR ENGINEERING MATERIALS With Emphasis on Geologic Materials*, Prentice-Hall, 1984

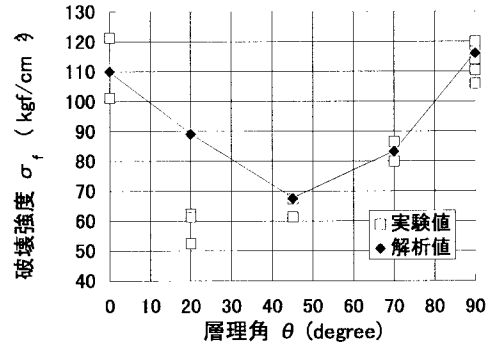


図2: 解析値と実験値の比較 ($\sigma_3 = 5 \text{ kgf/cm}^2$)

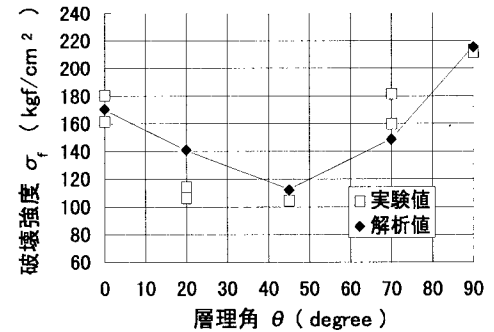


図3: 解析値と実験値の比較 ($\sigma_3 = 25 \text{ kgf/cm}^2$)

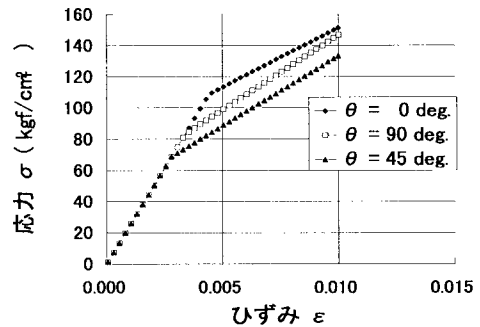


図4: 全体座標系での応力-ひずみ曲線