土木学会第53回年次学術講演会（平成10年10月）

Ⅲ－B 283

強度のばらつきを考慮した破壊確率モデルの提案

九州大学大学院　正　大嶺　聖　　同左　ﾌｪﾛｰ 落合英俊
九州大学大学院　正　安福規之　五洋建設　正　林　規夫

1．まえがき

一般に物体の強度は供試体の寸法の影響を受けることが知られている．このような寸法効果を評価する代表的なモデルとして最弱リンクモデル（Weakest link model）と束モデル（Bundle model）があるが，本文では，これらの二つのモデルを結び付けた新たな破壊確率モデルを提案する．

2．破壊確率モデルに基づく強度の評価法

（a）基本的な概念　これまで強度のばらつきを考慮した破壊確率モデルがいくつか提案されている．その代表的なモデルの概念図を図-1に示す．並列モデル（Average model）は強度の平均値を用いるもので，粘土のような延性的な材料に用いられている．一方，岩やコンクリートのような脆性的な材料には最弱リンクモデルまたは最弱リンクモデルが適用されている．これら二つのモデルはいずれも強度の寸法効果を評価するものであるが，前者は供試体の高さ方向について，後者は供試体の直径方向の寸法効果を表していると考えることができる．実際の供試体の寸法効果を考える場合，直径と高さの両方の寸法の影響を考慮する必要があることから，ここでは，最弱リンクモデルと束モデルの両方の特徴を有するCombined modelを提案する[1]．

（b）強度の確率分布　物体中に無数の弱面，すなわち，潜在的なクラックが存在し，そのクラックを含む微小要素の強度が全体の強度を支配していると考える．このときの強度が x を越える確率 $F(x)$ は次式に示すワイブル分布に従うと仮定する．

$$F(x)=\int_x^\infty f(x)\,dx=\exp(-\alpha x^\beta) \tag{1}$$

ここで，$\alpha>0,\ \beta>0$ であり，β は均一性係数と呼ばれている．$F(x)$ としては様々な分布があり得るが，ワイブル分布は x の範囲が正に限られており，物理的に矛盾がなく広く用いられている．また，式(1)を x で微分すると強度の確率密度関数 $f(x)$ が得られる．このときの変動係数ω（=分散/平均強度）は次式で与えられる．

$$\omega=\sqrt{\Gamma(1+2/\beta)-\Gamma^2(1+1/\beta)}\,/\Gamma(1+1/\beta) \tag{2}$$

ここで，Γはガンマ関数である．

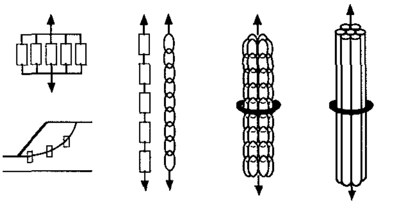

図-1　破壊確率モデルの概念

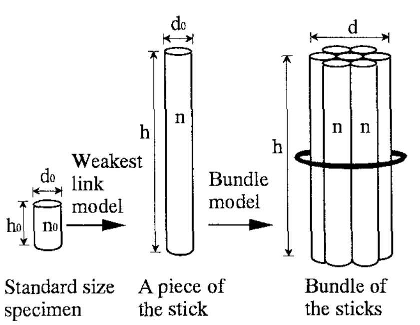

図-2　Combined Modelの基本的な考え方

（c）強度の評価式　Combined modelの基本的な考え方を図-2に示す．まず，直径d_0，高さh_0の標準サイズの供試体にn_0個のクラックが入っていると仮定する．この供試体と同じ直径で，高さhを有する一つの柱には体積に比例したn個のクラックがあり，この柱に対して最弱リンクモデルを適用する．さらに，この柱の束に対して束モデルを適用する．今，母集団の中からn個のクラックを取り出し，その中で最も小さな強度の確率を考える．このときの最小値が全体の強さを決定するという考え方が最弱リンクモデルである．すなわち，n個のクラックを持つ一本の柱の強度の確率密度関数は，式(1)を用いて次のように表される．

$$g_n(x)=nf(x)F(x)^{n-1}=n\alpha\beta\, x^{\beta-1}\exp(-n\alpha x^\beta) \tag{3}$$

この柱の強さをモード（最頻値）で代表させるなら，$g_n(x)$ の最大値は，$dg_n(x)/d(x)=0$ の条件より得られる．したがって，一本の柱の強度 s_n は規準となる供試体の強度 s_0と$n/n_0=h/h_0$ の関係を用いて次のように表される．

$$s_n=\left(\frac{h}{h_0}\right)^{-1/\beta}s_0 \tag{4}$$

確率モデル，クラック，寸法効果，破壊，変動係数

〒812-8581 福岡市東区箱崎6-10-1　Tel&Fax (092)642-3285

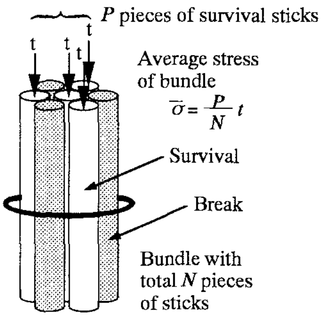

図-3　柱の束の応力状態

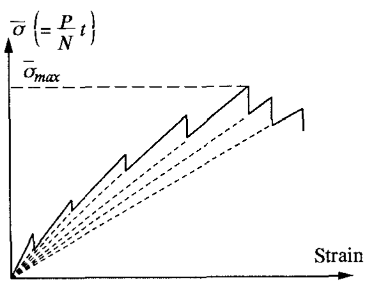

図-4　柱の束の応力－ひずみ関係

次に，柱の束の強さをの束モデルの考えに基づいて評価する．図-3は柱の束の応力状態を示したものである．ここで，すべての柱は同じ弾性係数を持ち，残留強さはゼロと仮定する．つまり，破壊に達した柱は応力がゼロで，残りの柱で荷重を均等に支えているものとする．N本の柱の束のうち，P本の柱に応力 t が作用している場合の束の平均応力は $\bar{\sigma} = (P/N)\,t$ と定義される．荷重が大きくなるに従いのPの数が減少し，このときの束の応力－ひずみ曲線は図-4のように模式的に表される．つまり，束の強度は$d\bar{\sigma}/dt = 0$ の条件より算定される．Daniels[2] はこの束の強度の厳密な算定法を示している．しかしながら，この算定式は複雑で陽な形で解が得られないため，本城[3] は数値解析により束モデルの適用を行っている．ここでは，N=∞の場合の解を求め，任意のNに対して，各条件を満足する関数形を仮定することにより束モデルにおける強度の評価を行う．

N=∞の場合の束は $g_n(x)$に従うすべての強度を含む柱の集合体と考えることができる．このとき，応力 t 以上の強度を持ち破壊に達していない柱の割合P/N は，次のように表される．

$$P/N = \int_t^{\infty} g_n(x)dx = \exp(-n\alpha t^{\beta}) \tag{5}$$

式(5)を$\bar{\sigma}$の定義式に代入すると，

$$\bar{\sigma} = (P/N)\,t = t\times\exp(-n\alpha t^{\beta}) \tag{6}$$

と表される．$\bar{\sigma}$ の最大値は$d\bar{\sigma}/dt = 0$ の条件により与えられるため，このときの束の強度は一本の柱の強度 s_n または標準供試体の強度s_0を用いて次のように表される．

$$s_{(\infty)} = c\,s_n = c\left(\frac{h}{h_0}\right)^{-1/\beta} s_0 \tag{7}$$

ここで，

$$c = (\beta - 1)^{-1/\beta}\exp(-1/\beta)$$

式(7)は束の強度の最小値を与えるものであり，パラメータc は強度の低減率を表している．任意の寸法の供試体の強度は，式(7)おいてc をd の関数$H(d)$ として置き換えることにより，次のように表されるものと考える．

$$s = H(d)\left(\frac{h}{h_0}\right)^{-1/\beta} s_0 \tag{8}$$

一方，通常の最弱リンクモデルにおける強度は体積の指数関数として，次のように表される．

$$s_{\mathrm{weakest}} = \left(\frac{V}{V_0}\right)^{-1/\beta} = \left(\frac{d}{d_0}\right)^{-2/\beta}\left(\frac{h}{h_0}\right)^{-1/\beta} s_0 \tag{9}$$

ここで，Vは供試体の体積である．また，並列モデルの強度は供試体の寸法に無関係でs_{average}=s_0 となる．したがって，Combined model における強度はs_{weakest}とs_{average}の間にあるため，$H(d)$は次の条件を満たす必要がある．

①$H(d)=1$ at $d=d_0$, ②$H(d)=c$ at $d=\infty$, ③$(d/d_0)^{-2/\beta}<H(d)<1$

これらを満足する関数として次式を仮定する．

$$H(d) = \left\{\left(1-\sqrt{c}\right)\left(\frac{d}{d_0}\right)^{-1/\beta} + \sqrt{c}\right\}^2 \tag{10}$$

最弱リンクモデルでは寸法が無限大になると強度がゼロとなることから，式(10)はc=0の場合に，最弱リンクモデルと一致するように決定された．最終的に，束の強度は式(10)を式(8)に代入することにより次のように表される．

$$s = \left\{\left(1-\sqrt{c}\right)\left(\frac{d}{d_0}\right)^{-1/\beta} + \sqrt{c}\right\}^2\left(\frac{h}{h_0}\right)^{-1/\beta} s_0 \tag{11}$$

すなわち，任意の寸法を持つ供試体の強度が式(11)によって評価される．

3．まとめ

最弱リンクモデルと束モデルを結び付けた新たな破壊確率モデルを誘導した．このモデルは，供試体の直径と高さの両方に対する寸法効果を別々に考慮しているため，体積のみならず，形状（縦横比）の影響を評価できるという利点を有している．今後は，提案モデルの有用性を検討していきたい．

REFERENCES　1) Omine, K. et al., (1998) : Evaluation of the size effect on the strength of cement-treated soils, Int. Symposium on Hard Soils & Soft Rocks (Submitted).
2) Daniels, H.E. (1945) : The statistical theory of the strength of bundles of threads. I, Proc. Royal Society, Vol.183.A., pp.405-435.　3) Honjo, Y. (1982) : A probabilistic approach to evaluate shear strength of heterogeneous stabilized ground by deep mixing method, S&F, Vol.22, No.1, pp.23-38.