

II-369

閉鎖領域へ流入する汚染物質濃度の移流効果による最適制御

中央大学 学生会員 佐久間 清文
中央大学 正会員 川原 睦人

1 はじめに

千葉県北西部に位置する手賀沼は1960年代以降の高度経済成長による急激な人口増加による生活排水の流入により1974年以降24年間連続して水質汚濁1位の沼として知られている。この問題に対して、手賀沼流域下水道事業・ヘドロ浚渫事業・流入河川浄化事業^[1]が行なわれているが、期待どおりの効果をあげていない。

これらの事業に加えて、手賀沼の平均水深・最大水深が極めて浅く、総貯水量は少ないが年間流入量は多い部類なので滞留時間は短いという^[2]点を利用して、利根川から浄化用水を手賀沼に流入させて水質浄化を行なおうという北千葉導水事業の実現に向け工事が進んでいる。

ところが、既存の手賀沼汚染に関する報告では生体個数や数地点でのCOD濃度の測定は行なわれているが、汚染物質が流入した時の拡散の様子や北千葉導水事業が実施された時どの程度の移流効果が期待でき、それはどの地点からどの程度与えた時かといった検討は報告されていない。

そこで本研究では、北千葉導水事業の移流効果によってどの程度汚染物質を流すことができるかを解析する。また、沼全体の汚染物質濃度をある目的値にするためには流入量をどの地点からどの程度流入させればよいかを最適制御理論を用いて解析することを目的とする。

最適制御問題を解くにあたり計算時間、記憶容量、解の精度が問題となる。それらを解決するために、時間積分にはTaylor展開の2次の項までを考慮したBTD法を、空間方向の離散化には三角形一次補間を用いた有限要素法を適用し、前処理付きの共役勾配法を用いて連立方程式を解く。また最適化にはLMQN法を用いて大規模最適化問題に対処する。

2 基礎方程式・境界条件

基礎方程式として2次元非線形浅水長波方程式と移流拡散方程式を用いる。

$$\dot{u}_i + u_i u_{i,j} + g \eta_{,i} - \nu(u_{i,j} + u_{j,i})_j + f u_i = 0 \quad (1)$$

$$\dot{\eta} + \{(h + \eta) u_i\}_{,i} = 0 \quad (2)$$

$$\dot{c} + u_i c_{,i} - \kappa c_{,ii} = 0 \quad (3)$$

ここで u_i は流速、 η は水位変動量、 c は汚染物質濃度、 g は重力加速度、 h は水深、 ν, κ はそれぞれ渦動粘性係数、拡散係数を表す。また $f = \frac{\tau}{h_s} (u_k u_k)^{\frac{1}{2}}$ で摩擦係数である。

3 評価関数

最適制御理論は評価関数の最小化問題であり、濃度を最適とするような操作流速は以下に定義される評価関数を最小にすることで求まる。

$$J = \int_t \int_V \frac{1}{2} Q(c - c_{opt})^2 dV dt + \int_t \int_{\Gamma_c} \frac{1}{2} R \bar{u}_i^2 d\Gamma_c dt \quad (4)$$

しかし実際の物理現象を考慮するには、この評価関数に基礎方程式を拘束条件とした拡張評価関数を最小化しなければならない。

$$\begin{aligned} J^* = J &+ \int_t \int_V u_i^* \{ \dot{u}_i + u_j u_{i,j} + g \eta_{,i} \\ &- \nu(u_{i,j} + u_{j,i})_j + f u_i \} dV dt \\ &+ \int_t \int_V \eta^* \{ \dot{\eta} + \{(h + \eta) u_i\}_{,i} \} dV dt \\ &+ \int_t \int_V c^* \{ \dot{c} + u_i c_{,i} - \kappa c_{,ii} \} dV dt \end{aligned} \quad (5)$$

ここで、 u_i^*, η^*, c^* はラグランジュ乗数である。評価関数 J^* の最小値を求めるために、 J^* の第一変分をとる。

$$\delta J^* = 0 \quad (6)$$

(6) を解くことで、各ラグランジュ乗数に対する随伴方程式が得られる。

$$- \dot{u}_i^* + u_{j,i} u_j^* - (u_j u_i^*)_{,j} + f u_i^* - (h + \eta) \eta_{,i}^* + c_{,i} c^* = 0 \quad (7)$$

$$\dot{\eta}^* - u_i \eta_{,i}^* - g u_{i,i}^* = 0 \quad (8)$$

$$- \dot{c}^* - (u_i c^*)_{,i} - \kappa c_{,ii}^* + Q(c - c_{opt}) = 0 \quad (9)$$

4 最小化アルゴリズム

評価関数の最小化手法として共役勾配法の計算容量が少ない利点と、準Newton法の計算効率の良さを組み合わせたLMQN(Limited-Memory Quasi-Newton)法を用いる。逆Hessian行列の近似計算にはL-BFGS法を用いて計算コストを削減する。

アルゴリズムを以下に示す。

- 1) 初期操作量 $\bar{u}_{i0}$ と、正値対称な逆Hessian行列 H_0 を与え、 $k=0$ とする。ここで、 $H_0 = I$ とする。
- 2) $g_0 = \frac{\delta J(\bar{u}_{i0})}{\delta \bar{u}_{i0}}$ を求める。 $g_0 = 0$ なら終了。
- 3) $d_0 = -H_0 g_0$ を計算する。
- 4) $k=0, 1, 2, \dots$ として、 $J(\bar{u}_{ik} + \alpha_k d_k)$ を最小近似する α_k を直線探索で求め、 $u_{i,k+1} = u_{ik} + \alpha_k d_k$ とする。
- 5) $g_k = \frac{\delta J(\bar{u}_{i,k+1})}{\delta \bar{u}_{i,k+1}}$ を求める。 $g_k = 0$ なら終了。
- 6) L-BFGS法により逆Hessian行列 H_{k+1} を計算する。
- 7) $k=k+1$ として(4)に戻る。

キーワード：有限要素法、BTD法、最適制御理論、LMQN法

中央大学大学院理工学研究科 (〒112 東京都文京区春日 1-13-27, TEL 03-3817-1814, FAX 03-3817-1803)

5 数値解析例

数値解析例として、千葉県北西部に位置する手賀沼をモデルとして扱う。周長は約 38km、平均水深 0.86m、最大水深 3.80m で、汚染物質の主要流入河川として、図 1 の点 A(大堀川) と点 B(大津川) がある。本研究ではこれら 2 河川から流量および汚染物質が流入するという条件で計算を行なう。図 2 は水深コンター図、図 3 は有限要素分割図を示し、総節点数 700、総要素数 1159 である。図 4、図 5、図 6 はそれぞれ 6 時間後、12 時間後、24 時間後の拡散の状態を示している。これらの結果より汚染物質が流入した時の濃度の拡散の様子が確認できる。この結果を用いて汚染物質濃度を最適とする操作流速および操作点の配置決定問題を解析するが、現在計算中である。

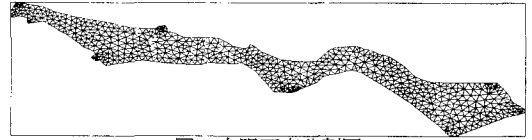


図 3 有限要素分割図

6 おわりに

本研究では閉鎖領域に流入する汚染物質を移流効果によってある目的濃度に保つように最適制御理論を用いて操作流速を決定するシステムを提案した。そのための前処理として解析領域の拡散の様子を解析し、分布の状態を明確にした。現在計算中であるが、この制御システムを構築することによって必要な流量だけ必要な場所から流入させることができるので効果的・経済的な制御ができるものと期待できる。

また数値解析的な見地からは大規模最適化問題を扱わなければならないので、計算効率・記憶容量・精度を考慮したうえで、離散化には有限要素法と BTD 法を用いた。また計算効率を向上させるために前処理付き共役勾配法によって連立方程式を解き、最適化には改良型準 Newton 法である LMQN 法を用いて、従来当研究室で用いていたアルゴリズムと比較して大幅な計算コスト・記憶容量を削減することができた。

今後は現在計算中の問題を示し、より現実的な制御が可能となるような検討が必要となる。

参考文献

- [1] 我孫子市環境 保全課 '手賀沼を知っていますか' 1994
- [2] '日本の湖沼' 河川環境管理財団 1988
- [3] 我孫子市自然環境調査 水生生物調査報告書, 我孫子市, 1993
- [4] I.M.Navon et al. 'Large Scale Unconstrained and Constraint Optimization Methods and Their Applications'

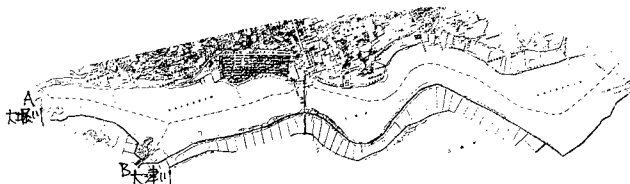


図 1・手賀沼の地形図

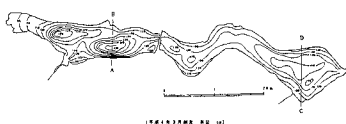


図 2・手賀沼の水深コンター図

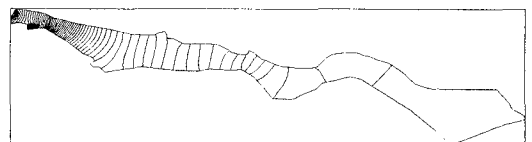


図 4 6 時間後の濃度分布

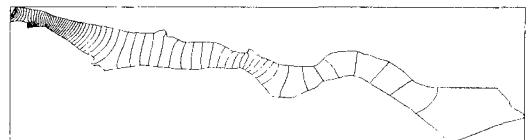


図 5 12 時間後の濃度分布

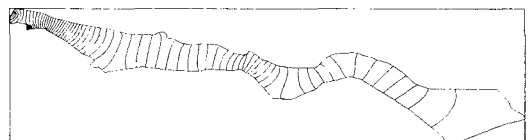


図 6 24 時間後の濃度分布