

1. はじめに Komatsu¹⁾が提案した 6-point scheme をはじめ高精度スキームは移流による物質輸送現象を精度良くシミュレートすることができる。しかしながら矩形分布など分布の勾配が急激なところでは物理的に意味のない数値振動が発生してしまう。数値振動を抑制するためにはフラックス制限関数 (limiter) を導入し TVD スキームにすればよいが、6-point scheme は特性曲線法に基づくスキームであり直接 limiter を導入することができない。limiter の導入を可能にするためには 6-point scheme を保存形式で定式化する必要がある。本研究は 6-point scheme の保存形式表示を行い、高精度スキームと TVD スキームの両者の長所を合わせ持つ計算スキームの開発を試みたものである。

2. 保存形式 6-point scheme 移流による物質輸送の支配方程式は 1 次元の場合式 (1) である。また保存形式で表せば式 (2) のようになる。

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + u \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0 \quad (1) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial u \Phi}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

式 (1) は特性曲線表示を行うことができる。6-point scheme は特性曲線法に基づく手法で次式で表される。

$$\Phi_i^{n+1} = P_1 \Phi_{i-3}^n + P_2 \Phi_{i-2}^n + P_3 \Phi_{i-1}^n + P_4 \Phi_i^n + P_5 \Phi_{i+1}^n + P_6 \Phi_{i+2}^n \quad (3)$$

ここで、

$$P_1 = -\frac{13}{720} \alpha^3 - \frac{3877}{101280} \alpha^2 + \frac{17117}{303840} \alpha \quad P_2 = \frac{37}{144} \alpha^3 + \frac{1069}{20256} \alpha^2 - \frac{18821}{60768} \alpha \quad P_3 = -\frac{49}{72} \alpha^3 + \frac{6563}{10128} \alpha^2 + \frac{31373}{30384} \alpha$$

$$P_4 = \frac{49}{72} \alpha^3 - \frac{4705}{3376} \alpha^2 - \frac{8717}{30384} \alpha + 1 \quad P_5 = -\frac{37}{144} \alpha^3 + \frac{5561}{6752} \alpha^2 - \frac{34435}{60768} \alpha \quad P_6 = \frac{13}{720} \alpha^3 - \frac{3121}{33760} \alpha^2 + \frac{22603}{303840} \alpha$$

α はクーラン数 ($\alpha = u \Delta t / \Delta x$) である。

次に式 (3) の保存形表示を行う。流速 u を一定として式 (2) を有限体積法で離散化し整理すれば式 (2) が得られる。

$$\Phi_i^{n+1} = \Phi_i^n - (\alpha \Phi_{i+1/2}^n - \alpha \Phi_{i-1/2}^n) \quad (4)$$

ここで、 $\Phi_{i \pm 1/2}^n$ はコントロールボリュームの界面濃度である。式 (3) を整理し式 (4) の形式に書き換えれば界面濃度を次のように定義できる。

$$\Phi_{i+1/2}^n = C_1 \Phi_{i+2}^n + C_2 \Phi_{i+1}^n + C_3 \Phi_i^n + C_4 \Phi_{i-1}^n + C_5 \Phi_{i-2}^n \quad (5)$$

ここで、

$$C_1 = -\frac{13}{720} \alpha^2 + \frac{3121}{33760} \alpha - \frac{22603}{303840} \quad C_2 = \frac{43}{180} \alpha^2 - \frac{6171}{8440} \alpha + \frac{37393}{75960} \quad C_3 = -\frac{53}{120} \alpha^2 + \frac{53}{80} \alpha + \frac{187}{240}$$

$$C_4 = \frac{43}{180} \alpha^2 + \frac{367}{25320} \alpha - \frac{19247}{75960} \quad C_5 = -\frac{13}{720} \alpha^2 - \frac{3877}{101280} \alpha + \frac{17117}{303840}$$

$\Phi_{i-1/2}^n$ については $i \rightarrow i-1$ とすれば良い。式 (4) および式 (5) が保存形式 6-point scheme である。なお流速が一定の場合は従来型 6-point scheme と保存形式 6-point scheme は一致する。

3. モデル計算 保存形式 6-point scheme の精度を検証するため次のようなモデル計算をおこなった。式 (6) で表わされる準ガウス型濃度分布を初期条件とした²⁾。ここで $M_0=10$, $\sigma=0.2$, $x_0=0.2$ である。また $x=0$ において濃度 C は 0 としている。この分布を場所的に線形に変化する流速 $u=u_0x$ で下流側に $t=20$ まで輸送させる。ここで u_0 は 0.1 とした。計算格子間隔は $\Delta x=0.05$, $\Delta t=0.02$ である。厳密解は式 (7) で与えられる²⁾。

移流数値計算, 保存形式 6-point scheme, 数値振動, universal limiter, discriminator

〒755-8611 宇部市常盤台 2557 TEL 0836-35-9441 FAX 0836-35-9429

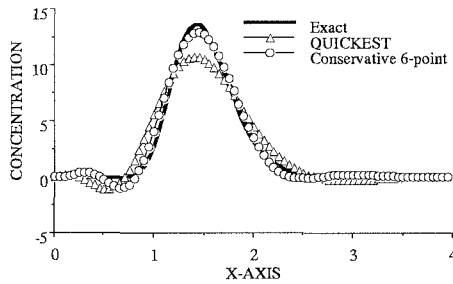


図-1 計算結果（保存形式 6-point scheme）

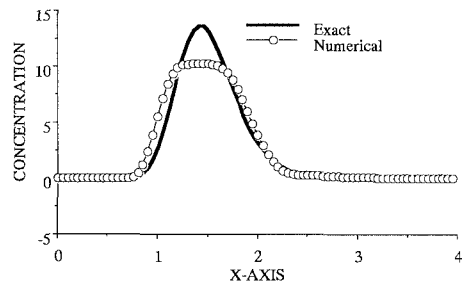


図-2 計算結果（universal limiter）

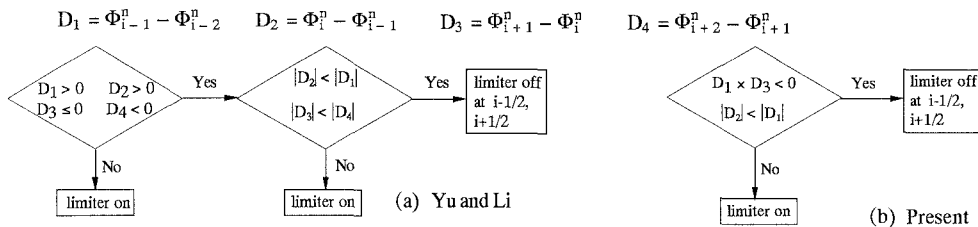


図-3 discriminator のフローチャート

$$C(x, 0) = \frac{M_0}{x \sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{[\ln(x/x_0)]^2}{2\sigma^2}\right\} \quad (6)$$

$$C(x, t) = \frac{M_0}{x \sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{[\ln(x/x_0) - u_0 t]^2}{2\sigma^2}\right\} \quad (7)$$

図-1は保存形式 6-point scheme と QUICKEST による計算結果である。保存形式 6-point scheme の係数は流速一定の条件から決定されているが、流速が場所的に変化する場合でも精度良く計算が行えることが分かる。しかしながら分布の裾の近傍で数値振動が見られる。数値振動を除去するため universal limiter³⁾を導入して保存形式 6-point scheme の TVD 化を行った。図-2にその計算結果を示す。数値振動は除去されているが、分布のピーク値近傍が平らになっている。

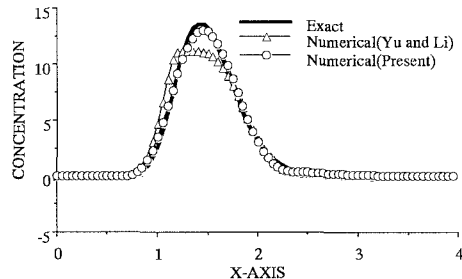


図-4 計算結果（universal limiter and discriminator）

4. Discriminatorの導入 ピーク値近傍の過剰なダンピングを避けるためには全ての計算格子点において limiter を作用させるのではなく、物理的に意味のある極値近傍では limiter を作用させない工夫が必要である。これを行うためには物理的に意味のある極値と数値振動を区別するアルゴリズムが必要である。Leonardらはこのアルゴリズムを discriminator と呼んでいる³⁾。図-3 (a) に Yu and Li が提案している discriminator⁴⁾ のアルゴリズムのフローチャートを示す。図-4 に Yu and Li の discriminator を導入した計算結果を示している。ピーク近傍のフラットな形状は改善されていない。次に図-3 (b) に示される新しい discriminator を用いて計算を行った。計算結果は同じく図-4 に示している。図より良好な計算解が得られていることが分かる。

5. まとめ 6-point scheme を保存形式表示させ universal limiter と discriminator を導入することで高精度でかつ数値振動を引き起こさないスキームを開発することを試みた。今後はさらなる discriminator の改良と多次元問題への拡張を行っていく予定である。

参考文献

- 1) Komatsu, T., Holly Jr. F.M., Nakashiki, N. and Ohgushi, K. : J. Hydrosoci. and Hydraul. Eng., Vol.3, No.2, pp.15-30, 1985
- 2) Zoppou, C. and Knight, J.H. : J. Hydraulic Eng., Vol.123, No.2, pp.144-148, 1997
- 3) Leonard, B.P. and Niknafs, H.S. : Computers & Fluids, Vol.19, No.1, pp.141-154, 1991
- 4) Yu, T.S. and Li, C.W. : Internat. J. Numer. Methods Fluids, 19, pp.997-1012, 1994