

II-323 自由表面流れ解析における下流側境界の取り扱い方法の比較検討

中央大学大学院 学生会員 ○玉城 宏幸
中央大学 正会員 檜山 和男

1. はじめに

河川や開水路のような自由表面を有する流れの数値解析を行う場合、下流側境界に対していかに適切な境界条件を与えるかということが問題となる。それは、下流側境界での流速、圧力が未知であるため、物理量を厳密に与えることが困難となるからである。そのため、開境界である下流側境界に対して何らかの近似的な処理を施す方法^{[1][2]}などが用いられている。

そこで本論文では、自由表面流れ解析において従来用いられているいくつかの下流側境界の取り扱い方法を適用し比較を行った。数値計算例として、規則波が発生させられる波動問題を取り上げ、下流側境界を通過する波の特徴を調べることでそれらの有効性を検討した。また、下流側境界の取り扱い方法と下流側境界位置との関係についての検討も行った。なお、数値解析手法には ALE(Arbitrary Lagrangian Eulerian) 法により自由表面を考慮した安定化有限要素法を用いた。

2. 基礎方程式

非圧縮粘性流体の基礎方程式は、ALE 表記された Navier-Stokes の運動方程式と非圧縮流体の連続式である。

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + (u_j - \hat{u}_j)u_{i,j} + \frac{1}{\rho}p_{,i} - \nu u_{i,jj} = f_i \quad (1)$$

$$u_{i,i} = 0 \quad (2)$$

u , $\hat{u}$, p , ρ , ν , f は流速、節点速度、圧力、密度、動粘性係数、物体力である。

3. 数値解析手法

時間方向の離散化は修正準陰解法により、流速を陽的、圧力を陰的に扱う。空間方向の離散化に流速双 1 次/圧力区分 0 次要素 (Q1/P0 要素) を用いた安定化有限要素法を適用すると、以下のような有限要素方程式を得る^[3]。

$$M_C \bar{u}_i^{n+1} = M_C u_i^n - \Delta t \{ (u_j - \hat{u}_j) K u_i^n + \nu S u_i^n - N f_i \} \quad (3)$$

$$(C^T M_L^{-1} C + D) \frac{\Delta t}{\rho} p^{n+1} = -C^T \bar{u}_i^{n+1} \quad (4)$$

$$u_i^{n+1} = \bar{u}_i^{n+1} + M_L^{-1} C \frac{\Delta t}{\rho} p^{n+1} \quad (5)$$

M_C , M_L , D , C , K , S , N は各係数行列を表している。式 (4) は、Element-by-Element SCG 法を連立一次方程式の解法としている。また、自由表面上の節点移動量を境界条件とした境界値問題を解くことによりメッシュ再分割を行い、メッシュを更新しながら解析を進めている。

4. 下流側境界の取り扱い方法

一般的に、開境界である下流側境界の取り扱い方法として、放射条件 (式 (6)) を解析手法の中に組み込むいわゆる開境界処理法と下流側境界付近の物理量を直接的に境界条件とする方法が主に利用されている。ここで、放射条件による方法は、下流側境界については式 (1) とは別に放射条件により支配されているとすることで内挿的に開境界処理を行う^{[4][5]}。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + c \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad (6)$$

ϕ , c は物理量、伝播速度である。式 (1) において左辺第 1, 2 項が放射条件とほぼ等価であることに着目すると、開境界を構成する要素に関しては式 (3) の右辺第 3 項を消去することで放射条件と同等のものを取り込むことが可能になることがわかる。ただし、伝播速度 c は式 (1) では与えられていないため、開境界付近の物理量から内挿的に求めるか、対象とする問題に応じて決定しなければならない。一方、開境界付近の物理量を下流側境界条件とする方法は、下流側境界付近の流速を下流側境界での流速として近似する方法である。本論文では、開境界節点 N より一つ上流側節点 $N-1$ の前時間ステップの流速を下流側境界条件とした。

$$u(N)_i^{n+1} = u(N-1)_i^n \quad (7)$$

5. 数値解析例

はじめに、自由表面流れの下流側境界に対して従来用いられている二つの方法を規則波が発生させられる波動問題に適用し比較を行った。一様水深水槽 (水深 0.5m) において、造波装置 (振幅 0.1m, 周期 2.0sec) により起こされる波の開境界における性質を調べることで下流側境界の取り扱い方法の有効性の評価を行った。比較する開境界処理法と下流側境界条件は表-1 に示す。ただし、放射条件による方法での伝播速度 c は波速、情報伝播速度、移流速度とした。x-方向メッシュ幅 Δx , 時間増分 Δt は、0.01, 0.001 とした。

次に、下流側境界の取り扱い方法と境界位置との関係について検討するために、底部に矩形障害物 (0.1m × 0.1m) を有する水槽 (水深 0.5m) での造波問題を取り上げた。このとき、造波装置は振幅、周期を 0.05m, 2.0sec とし、障害物の高さを $D(=0.1m)$ として障害物後方から下流側境界の距離を $1 \sim 9D$ と変化させた。

なお解析領域は、遠方に壁を設けた長領域と開境界処理法や下流側境界条件を適用する短領域とした。

KeyWords: 自由表面, 下流側境界, 放射条件, 下流側境界条件
連絡先: 〒112-8551 文京区春日 1-13-27, Tel.03-3817-1815

表-1. 下流側境界の取り扱い方法

放射条件	case1-1	$c=\sqrt{gh}$ (波速)
放射条件	case1-2	$c=\Delta x/\Delta t$ (情報伝播速度)
放射条件	case1-3	$c=u$ (移流速度)
下流側境界条件	case2-1	開境界付近流速 u
下流側境界条件	case2-2	開境界付近流速 u, v
基準	case3	十分な大きな領域で解析を中断

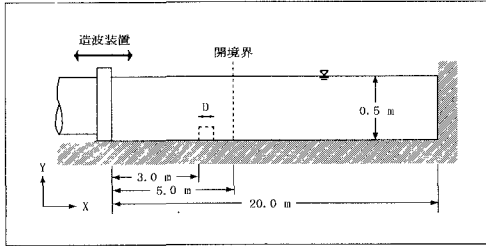


図-1. 解析条件

5.1. 下流側境界の取り扱い方法の比較

遠方に壁を設けた計算領域 ($L=20.0\text{m}$) で波が反射する前に解析を途中中断したもの (case3) を基準として、下流側境界に対して放射条件による方法と下流側境界条件を与える方法を適用した短領域 ($L=5.0\text{m}$) での解析結果の比較を行った。図-2に下流側境界における流速分布 (7秒後) を示す。これから下流側境界条件を与える方法は、case2-1, case2-2ともに流速分布が明らかに基準と一致していないことがわかる。一方、放射条件による方法は、case1-1, case1-2については基準と同様の傾向を示しており、特に伝播速度に波速を用いた case1-1 は良好な下流側境界の取り扱いが行えたと言える。基準との違いが生じた case1-2, case2-1, case2-2 は、適切なクーラン数を考慮しなかったため良好な解析結果が得られなかったと考えられる。また、伝播速度を移流速度とした case1-3 は、静水状態から解析を行ったため移流速度 u がゼロとなり下流側境界で波が透過しなかった。

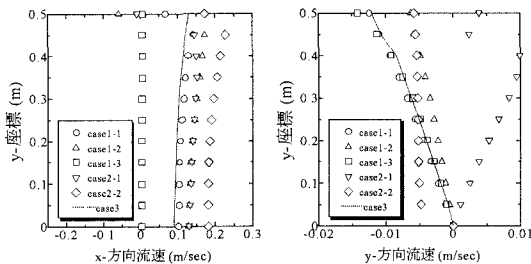


図-2. 下流側境界での流速分布

5.2. 下流側境界設置位置の検討

下流側境界に対して case1-1 を適用し、下流側境界位置と下流側境界の取り扱い方法の関係について検討した。下流側境界設置位置ごとの下流側境界における流速分布 (4秒後) を図-3に示す。設置位置が 1D のときは、障害物後方の渦を伴う複雑な流れの影響で解析が発散した。設置位置

を 3D とした場合は基準と差異が生じているが、5~9D の設置位置では良い解析結果が得られている。このことから、case1-1 を適用する下流側境界は障害物後方から 5D 以上の設置距離を取ることが必要であると考えられる。

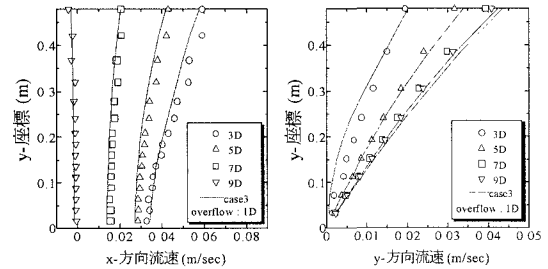


図-3. 下流側境界での流速分布

6. おわりに

本論文では、自由表面流れにおける下流側境界の取り扱い方法として放射条件による方法と下流側境界付近の流速を境界条件とする方法を適用し、それらの有効性について比較検討を行った。また、放射条件による方法と下流側境界位置との関係についても検討を行った。その結果、以下のことが結論として言える。

- (1) 比較した下流側境界の取り扱い方法では、伝播速度に波速を用いた放射条件による方法が下流側境界において波を無反射、無減衰で透過することが確認できた。
- (2) 伝播速度に情報伝播速度を用いた放射条件による方法や下流側境界付近の流速を下流側境界条件として与える方法は、適切なクーラン数を考慮しなかったため良好な解析結果が得られなかったと考えられる。
- (3) 放射条件による方法が効果的に機能するためには、下流側境界を適切な位置に設けなければならないことがわかった。今回数値解析例とした水槽底部に障害物を有する問題では、障害物後方から 5D 以上の設置距離を設ける必要があると考えられる。

今後は、河川のような流速の卓越する問題での下流側境界に対する有効な取り扱い方法について検討していく予定である。

参考文献

- [1] 日野幹雄：解説-波の無反射透過境界の数値スキームについて，東工大土木工学科研究報告，No.39，11月，pp.1-5，1988。
- [2] 清川哲志，灘岡和夫，Setdar Beji：非線形波動伝播シミュレーションにおける開境界処理の一方法，海岸工学論文集，第43巻，pp.6-10，1996。
- [3] 猪股渉，櫻山和男：安定化有限要素法による非圧縮性流れ解析，第10回数値流体力学シンポジウム論文集，pp.334-335，1996。
- [4] T.Papanastasiou：A New Outflow Boundary Condition，*Int. J. Numer. Methods in Fluids*，14，pp.587-608，1992。
- [5] M. Renardy：Imposed 'No' Boundary Condition at Outflow：Why Does It Work?，*Int. J. Numer. Methods in Fluids*，24，pp.413-417，1997。