II -322

ALE 有限要素法を用いた自由表面流れ解析

中央大学　学員　山本 兼哉
中央大学　正員　川原 睦人

1. はじめに

自由表面を有する流れは、河川や海洋等で見られるように我々の身の回りにおいて数多く観察できる現象の一つである。また振動が引き起こす貯槽内の液体運動（スロッシング）もこの一種である。例えば、原油タンクや火力および原子力発電所の冷却プールなど大量の液体を含む貯槽が加振を受ける時、貯槽内の液体がどのような動的挙動を示すかを事前に把握しておくことが、耐震設計をする際には非常に重要である。従来、これらの予測は縮小水理模型実験で行われてきたが、実験のみで高精度の挙動予測が難しいことやコストダウンの観点からも現在では実験とシュミレーションを組み合わせて予測することが多くなっている。また、設計変更などに柔軟に対応してデータを供給できる利点を考慮すると計算機の利用を前提とした数値解析が有効である。ここで貯槽の設計において重要な点は、共振点付近での液面の大振幅応答である。そこで本研究では、大振幅スロッシング問題において自由表面上に現れる強い非線形性や粘性効果の影響など流れ場をより忠実に把握するため、非圧縮 Navier-Stokes 方程式を用いその液体運動を数値解析により再現することを目標としている。自由表面問題を数値解析を用いて解析しようとする場合、最も重要な点は自由表面をいかに精度良く計算モデルに取り込むかである。そこで本研究では、移動境界が容易に表せ、かつ計算メッシュの歪みも調整できる両者の中間的立場をとった ALE (Arbitrary Lagrangian - Eulerian) [1],[2] 法を用いる。ALE 法では流体領域のみを解析領域とするため、その際問題となる自由表面のスムージング手法、また連続式について検討しその有効性を検証する。

2. 基礎方程式

流れ場は非圧縮性流れを仮定し、非圧縮性 Navier-Stokes 方程式の 3 次元解析を行なう。ALE 記述による非圧縮性流れの運動方程式と連続式は、次のように表記される。

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + (u_j - w_j)u_{i,j} + \frac{1}{\rho}p_{,i} - \nu u_{i,jj} = f_i \quad in \quad \Omega \qquad (1)$$

$$u_{i,i} = 0 \qquad in \quad \Omega \qquad (2)$$

u_i は流速, w_i はメッシュ速度, p は圧力, ν は動粘性係数, ρ は密度, f_i は外力を表す。ALE 法では節点座標を任意に選ぶことができるため、w_i は 座標 X_i の時間微分によって表される。

$$w_i = \frac{\partial X_i}{\partial t} \qquad (3)$$

3. 解析手法

本研究において、計算効率と安定性に関して優れた同次補間を用いた陰的有限要素法[3]を適用する 。これは時間方向の離散化には運動方程式に Crank-Nicolson 法を適用し、連続式を完全陰的に取り扱う。空間方向の離散化には改良型 BTD (Improved Balancing-Tensor-diffusivity) 法と FS (Fractional-Step) 法を組み合わせた分離型解法であり特に大規模計算においてその効果を発揮する手法である。

4. 自由表面の形状決定

自由表面の移動に伴う計算メッシュの移動は、自由表面上に位置する流体粒子は常に自由表面に留まるという次式により表現できる。

$$(u_i - w_i)n_i = 0 \quad on \quad \Gamma_3 \qquad (4)$$

n_i は自由表面の外向き単位法線ベクトルを表す。自由表面上のメッシュ速度 (w_1, w_2) は加振される容器の加振速度 $(\dot{u}_1, \dot{u}_2)$ と等しいとすると、式 (4) より

$$w_3 = u_3 + (u_1 - w_1)\frac{n_1}{n_3} + (u_2 - w_2)\frac{n_2}{n_3} \qquad (5)$$

を満たさなければならない。式 (5) を時間積分することにより、時刻 t から次の時刻 $t + \Delta t$ への移動量を評価することができる。

スムージング

式 (5) を繰り返し計算すことにより、移動境界である自由表面上の形状に著しい凹凸が生じることがある。これは数値計算を不安定に導く原因となり、計算が続行できなくなることがしばしは起こる。そこでこの凹凸をスムージングを施すことにより、この不安定要素を解消する。スムージングに関する式はいくつか提案されているが、これらは問題によりその効果が十分に発揮されない場合や過度に働くことによる弊害、また実行回数も数ステップに 1 回など全ての問題に対応できないものが多い。そこで、本研究では Taylor 展開により導かれる次式によりスムージングを行う。

$$X^s_{2(j)} = X_{2(j)} + \frac{\alpha}{2}(X_{2(j-1)} - 2X_{2(j)} + X_{2(j+1)}) \qquad (6)$$

この式は自由表面上の節点に拡散を与えることを意味している。ここでαは $0 \le \alpha \le 1$ で定義される平滑化の程度を定めるパラメータであり、$\alpha = 0$ はスムージングをしないことを意味する。これにより問題に応じた任意の値を設定でき、最適の値を与えることにより計算は安定しかつ適切な解を得ることができる。

ALE 有限要素法, リメッシング
中央大学大学院理工学研究科（〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27, TEL:03-3817-1814, FAX:03-3817-1803)

体積誤差補正

計算を繰り返すことにより、全体の流体体積に微小の誤差が生じる。これは、長時間の解析しようとする場合にこの誤差が蓄積され期待する解が得られなかったり、これが原因で計算が不安定になる影響がある。そこで、スムージングを施した後にその体積誤差を補正すべきであると考える。本研究で用いる体積誤差補正は、スムージング後の体積誤差を計算し、それに相当する平均的な水深を水面全体に付加することで初期の体積を常に保つという考えに基づくものである。従って最終的な自由表面の位置 $X^A_{3(j)}$ は、スムージング後の水深 $X^s_{3(j)}$ に平均体積補正水深量 ΔX_3 を考慮した次式により決定する。

$$X^A_{3(j)} = X^s_{3(j)} + \Delta X_3 \qquad on \ \ \Gamma_3 \tag{7}$$

自由表面の位置を決めた後、節点間隔が均等になるように解析領域全体の節点の再配置を行う。

5. 解析条件

本手法の有効性を検証するために、円筒容器でのスロッシング解析結果を示す。三次元軸対称貯槽内では一般に液面が加振方向に平行に運動する面内運動の他に、スワーリング (Swirling) と呼ばれる液面の回転運動は非線形応答として興味深い現象である。この現象は、水平方向に加振しているにもかかわらず液面が貯槽の壁面に沿って回転する面外運動の一種である。ここでは、特に計算の安定性について述べることとする。容器のサイズは、半径 $50cm$, 平均水深 $60cm$ でありこれを総節点数 3003 , 総要素数 2560 に有限要素分割を行う。各物性値は、密度 $\rho = 1.0g/cm^3$, 動粘性係数 $\nu = 0.01cm^2/sec$, また時間増分量 $\Delta t = 0.01sec$ とした。速度の外部境界条件即ちタンクを揺らす速度は、タンク内の流体が共振する周期波 (固有周波数 $f = 0.940$) である。また今解析では式 (6) を用いスムージングを行い、その際の α を 0.20 に設定した。

6. 解析結果

図-2 において、タンク左壁面におけるかけ上がり高さをを示す。固有周波数を入力しているため時間の経過とともに円筒容器内の液体の運動が激しくなり、大振幅スロッシング運動であることが確認できる。また図-3 は平均体積補正水深量であり、微小ではあるが振幅が大きくなるにつれかけ上がりピーク時において体積誤差補正が効いているのが分かる。図-4 は $T = 6.40sec$ における有限要素メッシュを示したものであり、自由表面には凹凸が現れておらず解析するにふさわしい領域が形成されていることも見てとれる。

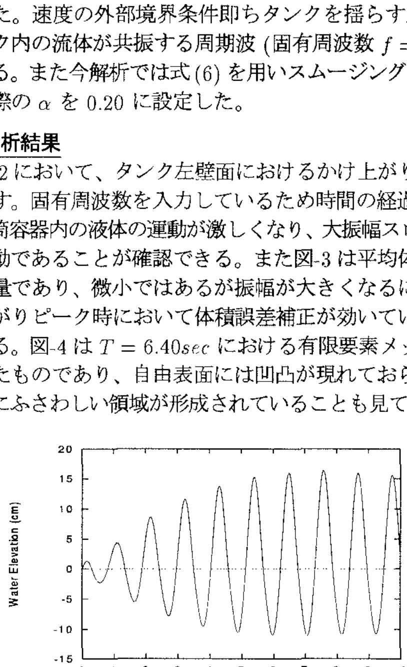

図 1: タンク左壁面におけるかけ上がり高さ

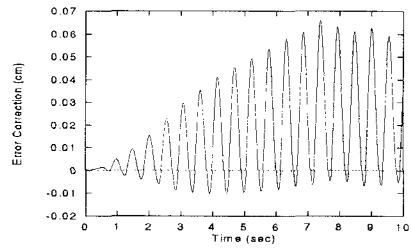

図 2: 平均体積補正水深量

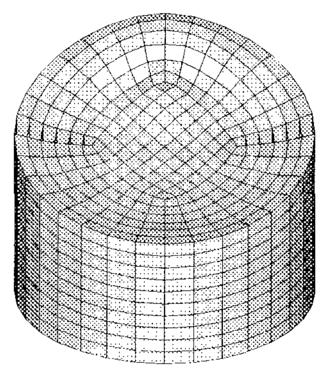

図 3: 有限要素メッシュ (Time = 6.40 sec)

7. おわりに

本研究では、大振幅スロッシング問題を取り上げそれを ALE 有限要素法に基づき数値解析を行った。移動境界問題を扱うとき最も問題となるのは、移動境界上に凹凸が発生し計算が不安定になる点である。この不安定要素を解消するために自由表面上の凹凸にスムージングを施した。スムージングに導入したパラメータ α は問題により任意に与えることができこの種の問題を解く上で非常に有効であると考えられる。しかしながら問題に応じた最適な α は経験的に決めており、唯一の値を決めるのは非常に難しいためまだ改善の余地があると考えられる。連続性に関しては、増加又は減少する流体体積を補正することにより連続式を満足させ、またこれを考慮することにより更なる安定性と解の精度を向上させることができると思われる。このリメッシング手法を毎回計算に取り込むことで、長時間の安定した計算が可能であることが確認できた。今後はこのスキームを用いてスワーリングのメカニズムの解明、また ALE 法の問題点ある積分領域に関して検討の必要があると思われる。

参考文献

[1] 岡本, 任意ラグランジュ・オイラー 有限要素法による大振幅スロッシング解析に関する研究, 中央大学学位論文,1992

[2] 牛島,‘ALE 法による 3 次元スロッシング現象の数値解析’, 第 10 回数値流体シンポジウム,pp.394-395,1996

[3] 丸岡, 太田, 平野, 川原,‘同時補間を用いた陰的有限要素法による非圧縮粘性流れの解析’, 構造工学論文集,Vol43A,pp.383-394,1997