II -321

正規化気泡関数要素を用いた陰的有限要素法による浅水長波流れ解析

中央大学理工学部　学生員 ○ 松本　純一
前橋工科大学工学部　正　員　梅津　剛
中央大学理工学部　正　員　川原　睦人

1. 緒言

有限要素法による浅水長波流れ解析において、著者らの用いてきた離散化手法は、空間方向については、流速と水位変動量に三角形１次要素を適用し、時間方向に対しては３段階陽解法を用いてきた。またこれは、計算の安定性を考慮するために、人工粘性を与える手法としている。しかしこの手法を用いる場合には、人工粘性の影響が大きく、また複雑な地形を対象とする現地計算では解の安定性に問題があった。

そこで本論では、精度の向上と計算の安定化を目的として、正規化気泡関数を適用した計算スキームを検討するものである。

2. 基礎方程式

浅水長波方程式を基礎方程式とする。式中において u , v は鉛直断面当たりに平均化された流速を、ζ は水位変動量を、g は重力加速度を示す。

$$\dot{u} + uu_{,x} + vu_{,y} + g\zeta_{,x} = 0 \tag{1}$$

$$\dot{v} + uv_{,x} + vv_{,y} + g\zeta_{,y} = 0 \tag{2}$$

$$\dot{\zeta} + \zeta u_{,x} + \zeta v_{,y} + u\zeta_{,x} + v\zeta_{,y} = 0 \tag{3}$$

3. 離散化手法

3.1 空間方向の離散化

通常の Galerkin 法に従い空間方向の離散化を行う。要素の選択として、流速、水位変動量に関して正規化気泡関数要素を補間関数に用いる。

$$\mathbf{v} = \Phi_1\mathbf{v}_1 + \Phi_2\mathbf{v}_2 + \Phi_3\mathbf{v}_3 + \Phi_4\tilde{\mathbf{v}}_4 \ , \ \tilde{\mathbf{v}}_4 = \frac{2}{(\xi+1)(\xi+2)}\left\{\mathbf{v}_4 - \frac{1}{3}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3)\right\}$$

$$\Phi_1 = 1 - r - s \ , \ \Phi_2 = r \ , \ \Phi_3 = s \ , \ \Phi_4 = \phi_e^{\xi} \ , \ [\mathbf{v}]^T = [\ u\ v\ \zeta\ ]$$

ここで、ϕ_e^{ξ} は正規化気泡関数であり、図１に示すように三角形の要素領域をその重心点を用いて３つの小三角形 w_i に分割する。正規化気泡関数はこの小三角形毎にアイソパラメトリック座標系 $\{r, s\}$ を用いて次のように定義される。

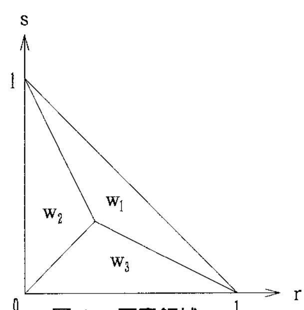

図１　要素領域

$$\phi_e^{\xi} = \begin{cases} \frac{(\xi+1)(\xi+2)}{2}\, 3^{\xi}\, (1-r-s)^{\xi} & in\ w_1 \\ \frac{(\xi+1)(\xi+2)}{2}\, 3^{\xi}\, r^{\xi} & in\ w_2 \\ \frac{(\xi+1)(\xi+2)}{2}\, 3^{\xi}\, s^{\xi} & in\ w_3 \end{cases}$$

この正規化気泡関数において安定化パラメータ ξ は以下の関数によって求める。

$$\frac{\xi\,(\xi+1)^2\,(\xi+2)^2}{4\,(2\xi-1)} = \frac{2\,|\mathbf{u}|}{3\ \mathbf{g}\ he\ \mu} \tag{4}$$

ここで、$|\mathbf{u}|$ は流速の絶対値、$\mathbf{g} = |\Phi_{i,x}| + |\Phi_{i,y}|$ $(i = 1\sim3)$、he は各要素の代表長さ、μ は粘性係数である。

キーワード：正規化気泡関数、陰解法、浅水長波方程式

〒112-8551　文京区 春日 1-13-27　TEL 03-3817-1814　FAX 03-3817-1803
〒371-0816　前橋市 上佐鳥町 460-1　TEL 027-265-7309　FAX 027-265-3837

3.2 時間方向の離散化

時間方向の離散化には、安定性に優れ時間増分を大きくとれる陰的解法を用いる。すなわち、基礎方程式 (1)〜(3) に Crank-Nicolson 法を適用した有限要素方程式は次式のようになる。

$$\begin{bmatrix} M_{\alpha\beta} & & \\ & M_{\alpha\beta} & \\ & & M_{\alpha\beta}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot u_\beta\\ \dot v_\beta\\ \dot\zeta_\beta\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u^*_\beta S_{\alpha\beta,x}+v^*_\beta S_{\alpha\beta,y} & & gS_{\alpha\beta,x}\\ & u^*_\beta S_{\alpha\beta,x}+v^*_\beta S_{\alpha\beta,y} & gS_{\alpha\beta,y}\\ \zeta^*_\beta S_{\alpha\beta,x} & \zeta^*_\beta S_{\alpha\beta,y} & u^*_\beta S_{\alpha\beta,x}+v^*_\beta S_{\alpha\beta,y}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_\beta^{n+1/2}\\ v_\beta^{n+1/2}\\ \zeta_\beta^{n+1/2}\end{bmatrix}$$

$$+\sum_{e=1}^{Ne}\frac{2\sqrt{g\zeta^*_\beta}\,Ae}{he}\begin{bmatrix}u_b^{n+1/2}\\ v_b^{n+1/2}\\ \zeta_b^{n+1/2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\ ,\ \left[u_b^{n+1/2}\right]^T=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & \tilde u_4^{n+1/2}\end{bmatrix} \qquad (5)$$

ここで、

$$M_{\alpha\beta}=\int\Phi_\alpha\Phi_\beta\,dV\ ,\ S_{\alpha\beta,x}=\int\Phi_\alpha\Phi_{\beta,x}\,dV\ ,\ S_{\alpha\beta,y}=\int\Phi_\alpha\Phi_{\beta,y}\,dV\ ,\ Ae:\text{各三角形要素の面積}$$

$$\dot{\mathbf{v}}_\beta=\frac{1}{\Delta t}(\mathbf{v}_\beta^{n+1}-\mathbf{v}_\beta^{n})\ ,\ \mathbf{v}^*_\beta=\frac{1}{2}(3\mathbf{v}_\beta^{n}-\mathbf{v}_\beta^{n-1})\ ,\ \mathbf{v}_\beta^{n+1/2}=\frac{1}{2}(\mathbf{v}_\beta^{n+1}+\mathbf{v}_\beta^{n})\ ,\ [\mathbf{v}_\beta]^T=[\ u_\beta\ v_\beta\ \zeta_\beta\ ]$$

である。式 (5) において線形近似としている $\mathbf{v}^*_\beta$ は、2 次精度 Adams-Bashforth 公式により得られている。このようにして得られたスキームは、時間に関して 2 次精度を有する線形スキームとなっている。

また、左辺第 3 項はスキームを安定化させるための正規化気泡関数から導かれる人口粘性項であり、正規化気泡関数のみに関するものである。この人口粘性の導出に当たっては、まず、未知数 u , v ,ζ のそれぞれに対して等方的な粘性を仮想的に導入する。この仮想的な粘性項を含む方程式に対して、正規化気泡関数要素を適用し、有限要素方程式を導く。さらに、この有限要素方程式において、仮想的な粘性を 0 とする極限を取る (人口粘性係数 $\mu\ \rightarrow 0$)。このことにより、求めるべき有限要素方程式 (5) が得られる。

ここで、$\mu=0$ とした場合の安定化パラメータは式 (4) より $\xi=-\infty$, 0.5 , ∞ の 3 つが考えられるが、本研究では有限の値である $\xi=0.5$ を用いるものとする。

4. 段波流れ解析による検討

水路長 10m、水深 10m、水位差 0.2m をモデルとした段波流れによる解析を行う。図 2 に 1 周期後の解析結果を示す。図 2 をみると、解析結果が初期条件の値とほぼ同じ結果となっており安定に、かつ精度よく計算されていることが解る。

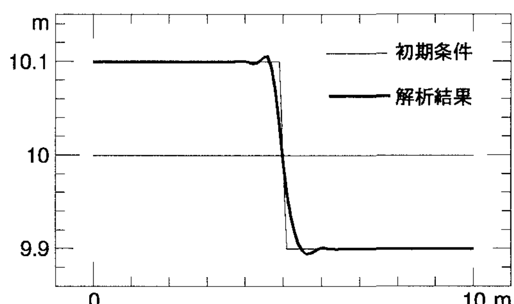

図 2 段波流れによる解析例

5. 結言

浅水長波流れの有限要素法解析について、空間方向の離散化に正規化気泡関数要素を用い、時間方向の離散化に Crank-Nicolson 法を適用した計算スキームは計算が安定であり、かつ高精度に計算が行えることを示した。今後は、この手法を用いた現地解析の適用について、検討してゆく所存である。

参考文献

[1] Takahiro Yamada : A BUBBLE ELEMENT FOR INVISCID FLOWS, Finite Elements in Fluids, vol.9, pp1567-1576, 1995

[2] 山田 貴博 : 圧縮性オイラー方程式に対する気泡関数要素を用いた有限要素スキーム, 第 9 回 数値流体力学シンポジウム, pp139-140, 1995

[3] 丸岡・松本・川原 : 四角形要素における正規化気泡関数を用いた非圧縮 Navier-Stokes 方程式の分離型有限要素法, 構造工学論文集 Vol. 44A, pp383-390, 1998