土木学会第53回年次学術講演会（平成10年10月）

II −131

大規模領域問題に適した緩勾配方程式の数値計算手法に関する提案

日本工営（株） 正員 ○桜庭 雅明
（株）ＩＮＡ 正員 増田 巧見
中央大学 正員 樫山 和男

1. はじめに

波浪変形の解析に用いられる緩勾配方程式は，規則波を対象とする問題に関して多く用いられるモデルであり，その結果の精度も高いことが報告されている[1)]．しかしながら，この方程式は楕円型の偏微分方程式であるため，数値計算を行う場合計算時間および計算機容量が膨大になり，現地を対象とするような大規模の問題を検討する場合は，計算方法の効率化が必要不可欠となる．

本論文では上記の問題点を解決するために，緩勾配方程式の有限要素解析に対して，自動領域分割法[2)]に基づく計算法を提案する．また，連立一次方程式の求解法にElement-by-Element SCG法を適用し計算時間の短縮と記憶容量の低減を図り検討を行ったものを報告するものである．

2. 基礎方程式と定式化手法

2.1. 基礎方程式と境界条件

本検討で用いる基礎方程式は(1)式で示される緩勾配方程式を適用する．

$$\nabla\cdot(CC_g\nabla\eta)+\omega^2\frac{C_g}{C}\eta=0 \tag{1}$$

ここに，ηは振幅分布関数，Cは波速，C_gは群速度，ωは角加速度を表す．

計算領域は，水深変化を許容する内部領域Ω_iと水深一定を仮定した外部領域Ω_oに分けるものとし，領域境界では壁面境界Γ_sと無限遠方の仮想境界Γ_∞に分けられる．それぞれの境界における条件式は (2)～(3)式のようにに与えられる．

$$\eta_{,n}=\hat{i}k\sin\alpha\frac{1-K_r}{1+K_r}\eta \qquad \text{on} \quad \Gamma_s \tag{2}$$

$$\lim_{r\to\infty}\sqrt{r}(\eta_{sc,r}-\hat{i}k\eta_{sc})=0 \qquad \text{on} \quad \Gamma_\infty \tag{3}$$

ここに，θは構造壁面での反射角，η_{sc}は散乱波の振幅関数，rは散乱源からの距離，K_rは壁面反射率である．

2.2. 定式化手法

基礎方程式と境界条件(1)～(3)の定式化手法には，内部領域Ω_iには境界型有限要素法，外部領域Ω_oには固有関数展開表示された解析解を用いた結合解法[3)]を用いた．また，開境界Γ_c上での圧力と流速の連続条件を自然境界条件として満足させるためにハイブリッド型の変分原理を導入した．最終的に導出される連立方程式は，内部領域に関する項と外部領域に関する項に分けられ次式のようになる．

$$[K_1]\{\eta\}-[K_{23}]\{\tilde{\eta}\}=\{F\} \tag{4}$$

ここに，$[K_1]$，$[K_{23}]$はそれぞれ内部領域および開境界部分に関する剛性マトリックスを表す．

3. 並列計算

3.1. 領域分割法

本報告では，計算効率の向上を目的とした領域分割法に基づく並列計算手法を提案している．これは，与えられた有限要素メッシュをいくつかの部分領域に分割し，部分領域ごとにプロセッサを割り当てて並列計算を行う方法である．なお，緩勾配方程式の並列処理に当たっては，Farhatの自動要素分割法に開境界部分を修正（開境界部分のみ分割を行わない）した境界型自動要素分割法を用いるものとする．この方法を用いることによって，計算時間の大部分を占める連立一次方程式の求解部分で大幅な計算時間の短縮が可能となる．図1にFarhatの自動要素分割と境界型自動要素分割の分割例を示す．

3.2. 有限要素方程式の並列解法

有限要素方程式(4)式の解法には，内部領域の剛性マトリックス$[K_1]$に対してElement-by-Element SCG法，開境界部分のマトリックス$[K_{23}]$に対しては，SCG法を用いた合成解法を適用する．この方法を用いることによって，通常用いられるような方程式の解法に比べ記憶容量が大幅に低減させることが可能になる．(4)式における内部領域の連立方程式を$Ax=b$，開境界部分の連立方程式を$Bx'=b'$としたとき，Element-by-Element SCG法とSCG法の合成並列処理法を以下に示す．

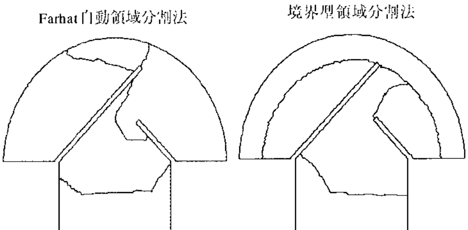

図1 Farhat自動領域分割図および境界型自動領域分割図

KeyWords: Mild Slope Equation, Finite Element Method, Large − Scale Computation
〒300 − 1245茨城県稲敷郡茎崎町高崎2304
日本工営（株）中央研究所
Tel : 0298(71)2035, Fax : 0298(71)2022

(i) 初期設定

$$r_0 = b \tag{5}$$

$$p_0 = r_0 \tag{6}$$

(ii) 解が収束するまで、(7)~(15) を k 回繰り返す。

$$q_k = Ap_k = \underbrace{\sum_e A^{(e)} p_k}_{①} \tag{7}$$

(ii-1) p_k より開境界部分を摘出する。

$$p' = p_k \tag{8}$$

$$q' = \underbrace{Bp'}_{②} \tag{9}$$

(ii-2) 内部境界部分と開境界部分の足し合せをする。

$$q_k = q_k + q' \tag{10}$$

$$\alpha_k = \underbrace{(r_k, r_k)}_{②} \,/\, \underbrace{(p_k, q_k)}_{②} \tag{11}$$

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k \tag{12}$$

$$r_{k+1} = r_k - \alpha_k q_k \tag{13}$$

$$\beta_k = \underbrace{(r_{k+1}, r_{k+1})}_{②} \,/\, \underbrace{(r_k, r_k)}_{②} \tag{14}$$

$$p_{k+1} = r_{k+1} + \beta_k p_k \tag{15}$$

Element-by-Element SCG 法の並列処理を行う際，式 (7) の①では隣接領域の1対1通信であるのに対し，式 (9) の②，式 (14) の②，式 (11) の②，では，全プロセッサを対象とした通信も必要となる．なお，プロセッサ間の通信に関しては玉井ら[4]の報告と同様にして行い，計算の並列処理を行った．

4. 数値解析例

前述の手法による数値計算例として，図2に示す任意形状港湾の港内波高分布解析を行った．計算に用いる有限要素の分割は表1に示すようなパターンについて検討を行った．構造物の境界条件として，構造物の壁面反射率は図2に示すとおりであり，入射波の条件は Ho=1.0m, To=10.0sec, 波向は汀線に直角とした．波高分布は図2に示すとおりであり，この計算結果における記憶容量分散率と演算速度倍率を図3に示すとおりである．この結果より，プロセッサ数が増加することによって記憶容量を大幅に低減していることが確認できる．また，演算速度倍率では Farhat の自動領域分割より境界型有限要素分割が効率の良い並列処理を行えている．この数値計算例における記憶容量は通常の計算に比べて約 30 % にまで低減化を行うことが可能になっているが，計算速度の面では理想的な速度向上を図られていない．これは，開境界処理には並列処理が行われていないことによる同期待ち時間の増加が原因であるものと考えられる．

5. おわりに

本報告において，緩勾配方程式に境界型有限要素法を適用した場合における計算の効率化に関する提案を行った．検討した結果をまとめると以下のようになる．

1) 内部領域に Element-by-Element SCG 法および開境界に SCG 法を適用した合成並列処理解法を用いることによって，記憶容量の低減が図られることが可能となり，比較的大規模な問題における計算が可能になることが示された．
2) Farhat の領域分割法に修正を行った境界型領域分割法を提案することによって，効率の良い並列計算を行うことが可能になった．

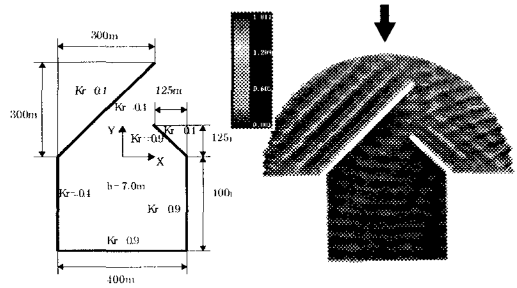

図2　計算モデルおよび波高分布図

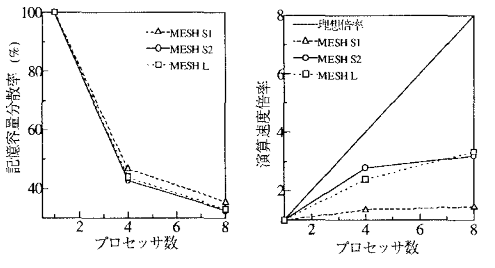

図3　記憶容量分散率と演算速度倍率

表1　有限要素分割表

	領域分割法	節点数	要素数
MESH S1	Farhat	14971	29219
MESH S2	境界型	14971	29219
MESH L	境界型	46465	91628

参考文献

1) 土木学会海岸工学委員会編：海岸波動　～波・構造物・地盤の相互作用の解析法～, 土木学会 (1994)
2) Farhat,C : A simple and efficient automatic FEM domain decomposer, *Computer & Structures*, 28, pp.576-602(1988)
3) Kashiyama,K. and Kawahara, M. : A boundary-type finite element model for water surface wave problems, Int. J. for Numerical Methods in Fluids, Vol. 8, pp.65-79(1988)
4) 玉井典，樫山和男：非構造格子に基づく三次元非圧縮性流れの並列有限要素解析, 第11回数値流体力学シンポジウム講演論文集, pp.557-558(1997)