土木学会第53回年次学術講演会（平成10年10月）

II -129

渦度を考慮した非線形緩勾配方程式

東京大学大学院　学生会員　柿沼太郎
東京大学大学院　正会員　渡辺　晃
東京大学大学院　フェロー　磯部雅彦

1. 序　論

保存力場において自由水面を有する非圧縮性の完全流体を対象とし、その運動が回転である場合にも適用可能な非線形緩勾配方程式を変分法を用いて導く。

2. 汎関数の定義

完全流体の回転運動において、速度 (u, v, w) を次式のようにおく (Bateman, 1931)。

$$\boldsymbol{u} = (u, v) = \nabla\phi + a\nabla b, \quad w = \frac{\partial\phi}{\partial z} + a\frac{\partial b}{\partial z} \tag{1}$$

ここで、$\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ である。完全流体の非回転運動では、式 (1) において関数 a および b からなる項を 0 とすることが可能で、そのとき、ϕ が速度ポテンシャルとなる。

流体が非圧縮性であるとする。いま、変分問題の作用 S を次式のような汎関数とする (Luke, 1967)。

$$S[\phi, a, b, \zeta] = \int_{t_1}^{t_2}\iint_A\int_{-h}^{\zeta}\left\{\frac{\partial\phi}{\partial t} + a\frac{\partial b}{\partial t} + \frac{1}{2}|\nabla\phi + a\nabla b|^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial z} + a\frac{\partial b}{\partial z}\right)^2 + gz\right\}dz\,dA\,dt \tag{2}$$

ここで、ζ および h は、それぞれ、水面変動および静水深であり、g は、重力加速度である。また、A は、対象平面領域である。

任意の微小量 $\delta\phi$, δa, δb および $\delta\zeta$ に対して S の第1変分 δS が 0 となるとき、与えられた初期条件および水平方向の境界条件のもとで、式 (3)～(7) が成り立つ。

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{3}$$

$$w = \frac{\partial\zeta}{\partial t} + \boldsymbol{u}\cdot\nabla\zeta \qquad \text{at} \quad z = \zeta \tag{4}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + a\frac{\partial b}{\partial t} + \frac{1}{2}(|\boldsymbol{u}|^2 + w^2) + g\zeta = 0 \qquad \text{at} \quad z = \zeta \tag{5}$$

$$\boldsymbol{u}\cdot\nabla h + w = 0 \qquad \text{at} \quad z = -h \tag{6}$$

$$\frac{da}{dt} = \frac{db}{dt} = 0 \tag{7}$$

ここで、d/dt は、Lagrange の微分演算子である。

式 (3)～(6) は、それぞれ、Euler の連続方程式, 水面における運動学的境界条件, 水面における力学的境界条件および底面における運動学的境界条件である。

また、式 (1) より、渦度 $\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ の x, y, z の各軸回わりの成分が、それぞれ、a および b を用いて次式のように表わせる。

$$\omega_x = \frac{\partial(a, b)}{\partial(y, z)}, \quad \omega_y = \frac{\partial(a, b)}{\partial(z, x)}, \quad \omega_z = \frac{\partial(a, b)}{\partial(x, y)} \tag{8}$$

このとき、$a = c_a(\ell)$, $b = c_b(\ell)$ が、任意の時刻における渦線の方程式となる。ここで、ℓ は、各時刻における渦線の名前を表わし、$c_a(\ell)$ および $c_b(\ell)$ は、それぞれ、渦線毎に一定の値である。時刻 $t = \tau_1$ において $a = c_a(\ell)$, $b = c_b(\ell)$ の解である渦線 ℓ 上にある任意の流体粒子を Lagrange 的に追跡すると、その流体粒子の a および b の値は、式 (7) より、$t = \tau_2$ においても変わらない。従って、$t = \tau_1$ において渦線 ℓ 上にあるすべての流体粒子が、$t = \tau_2$ において $a = c_a(\ell)$, $b = c_b(\ell)$ の解である渦線上に移動する。すなわち、式 (7) は、渦線が流体とともに動き、常に同じ流体粒子を含むということを示している。渦線を形成していた流体粒子がいつまでも渦線を形成するから、Kelvin の循環定理といった渦に関する諸定理が成り立つことになる。

キー・ワード:　渦度,　強非線形,　緩勾配方程式
連絡先:　〒113–0033 文京区本郷 7–3–1,　TEL. 03(3812)2111(内線 6114),　FAX. 03(5689)7340

3. 渦度を考慮した非線形緩勾配方程式の導出

非回転運動の場合の非線形緩勾配方程式を導いた磯部 (1994) と同一の手法を用いるが、ここでは、渦度を考慮するため、次式のように 3 関数を有限個の鉛直分布関数の重み付き重ね合わせによって近似する。

$$\phi(\boldsymbol{x},z,t)=Z_\alpha(z;h(\boldsymbol{x}))\cdot f_\alpha(\boldsymbol{x},t),\quad a(\boldsymbol{x},z,t)=X_\alpha(z;h(\boldsymbol{x}))\cdot p_\alpha(\boldsymbol{x},t),\quad b(\boldsymbol{x},z,t)=Y_\alpha(z;h(\boldsymbol{x}))\cdot q_\alpha(\boldsymbol{x},t) \tag{9}$$

ここで、自然数 α は、積の総和規約に関する添え字である。これらの ϕ, a および b を式(2) に代入して z 軸方向に積分すると、汎関数 $S=\int_{t_1}^{t_2}\iint_A \mathcal{L}\,dA\,dt$ の Lagrangian $\mathcal{L}[f,p,q,\zeta]$ が式(10) となる。

$$\begin{aligned}\mathcal{L}=&\frac{g}{2}(\zeta^2-h^2)+\tilde{Z}_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial t}+\frac{1}{2}A_{\beta\gamma}\nabla f_\beta\nabla f_\gamma+\frac{1}{2}B_{\beta\gamma}f_\beta f_\gamma+C_{\beta\gamma}f_\beta\nabla f_\gamma\nabla h+\frac{1}{2}D_{\beta\gamma}f_\beta f_\gamma(\nabla h)^2+E_{\beta\gamma}p_\beta\frac{\partial q_\gamma}{\partial t}\\&+F_{\beta\gamma\delta}\nabla f_\beta\cdot p_\gamma\nabla q_\delta+G_{\beta\gamma\delta}f_\beta p_\gamma q_\delta+H_{\beta\gamma\delta}f_\beta p_\gamma\nabla q_\delta\nabla h+I_{\beta\gamma\delta}\nabla f_\beta\cdot p_\gamma q_\delta\nabla h+J_{\beta\gamma\delta}f_\beta p_\gamma q_\delta(\nabla h)^2\\&+\frac{1}{2}K_{\beta\gamma\delta\varepsilon}p_\beta p_\gamma\nabla q_\delta\nabla q_\varepsilon+\frac{1}{2}L_{\beta\gamma\delta\varepsilon}p_\beta p_\gamma q_\delta q_\varepsilon+M_{\beta\gamma\delta\varepsilon}p_\beta p_\gamma q_\delta\nabla q_\varepsilon\nabla h+\frac{1}{2}N_{\beta\gamma\delta\varepsilon}p_\beta p_\gamma q_\delta q_\varepsilon(\nabla h)^2\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{gathered}\tilde{Z}_\alpha=\int_{-h}^{\zeta}Z_\alpha\,dz,\quad A_{\alpha\beta}=\int_{-h}^{\zeta}Z_\alpha Z_\beta\,dz,\quad B_{\alpha\beta}=\int_{-h}^{\zeta}\frac{\partial Z_\alpha}{\partial z}\frac{\partial Z_\beta}{\partial z}\,dz,\quad C_{\alpha\beta}=\int_{-h}^{\zeta}\frac{\partial Z_\alpha}{\partial h}Z_\beta\,dz,\\ D_{\alpha\beta}=\int_{-h}^{\zeta}\frac{\partial Z_\alpha}{\partial h}\frac{\partial Z_\beta}{\partial h}\,dz,\quad E_{\alpha\beta}=\int_{-h}^{\zeta}X_\alpha Y_\beta\,dz,\quad F_{\alpha\beta\gamma}=\int_{-h}^{\zeta}Z_\alpha X_\beta Y_\gamma\,dz,\\ G_{\alpha\beta\gamma}=\int_{-h}^{\zeta}\frac{\partial Z_\alpha}{\partial z}X_\beta\frac{\partial Y_\gamma}{\partial z}\,dz,\quad H_{\alpha\beta\gamma}=\int_{-h}^{\zeta}\frac{\partial Z_\alpha}{\partial h}X_\beta Y_\gamma\,dz,\quad I_{\alpha\beta\gamma}=\int_{-h}^{\zeta}Z_\alpha X_\beta\frac{\partial Y_\gamma}{\partial h}\,dz,\\ J_{\alpha\beta\gamma}=\int_{-h}^{\zeta}\frac{\partial Z_\alpha}{\partial h}X_\beta\frac{\partial Y_\gamma}{\partial h}\,dz,\quad K_{\alpha\beta\gamma\delta}=\int_{-h}^{\zeta}X_\alpha X_\beta Y_\gamma Y_\delta\,dz,\quad L_{\alpha\beta\gamma\delta}=\int_{-h}^{\zeta}X_\alpha X_\beta\frac{\partial Y_\gamma}{\partial z}\frac{\partial Y_\delta}{\partial z}\,dz,\\ M_{\alpha\beta\gamma\delta}=\int_{-h}^{\zeta}X_\alpha X_\beta\frac{\partial Y_\gamma}{\partial h}Y_\delta\,dz,\quad N_{\alpha\beta\gamma\delta}=\int_{-h}^{\zeta}X_\alpha X_\beta\frac{\partial Y_\gamma}{\partial h}\frac{\partial Y_\delta}{\partial h}\,dz\end{gathered} \tag{11}$$

このとき、各変関数に関して変分法の Euler の方程式を求めると、緩勾配近似のもとで式(12)〜(15) が得られる。ここで、例えば、Z_α^ζ および $\partial Z_\beta^\zeta/\partial z$ は、それぞれ、Z_α および $\partial Z_\beta/\partial z$ の $z=\zeta$ における値である。

$$\begin{aligned}&Z_\alpha^\zeta\frac{\partial\zeta}{\partial t}+\nabla(A_{\alpha\beta}\nabla f_\beta)-B_{\alpha\beta}f_\beta+(C_{\beta\alpha}-C_{\alpha\beta})\nabla f_\beta\nabla h+\nabla(F_{\alpha\beta\gamma}p_\beta\nabla q_\gamma)-G_{\alpha\beta\gamma}p_\beta q_\gamma\\&-H_{\alpha\beta\gamma}p_\beta\nabla q_\gamma\nabla h+I_{\alpha\beta\gamma}\nabla(p_\beta q_\gamma)\nabla h+\frac{\partial Z_\beta^\zeta}{\partial h}Z_\alpha^\zeta f_\beta\nabla\zeta\nabla h+Z_\alpha^\zeta X_\beta^\zeta\frac{\partial Y_\gamma^\zeta}{\partial h}p_\beta q_\gamma\nabla\zeta\nabla h=0\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}&E_{\beta\alpha}\frac{\partial p_\beta}{\partial t}+X_\beta^\zeta Y_\alpha^\zeta p_\beta\frac{\partial\zeta}{\partial t}+\nabla(F_{\beta\gamma\alpha}\nabla f_\beta\cdot p_\gamma)-G_{\beta\gamma\alpha}f_\beta p_\gamma+H_{\beta\gamma\alpha}\nabla(f_\beta p_\gamma)\nabla h\\&-I_{\beta\gamma\alpha}\nabla f_\beta\cdot p_\gamma\nabla h+\nabla(K_{\beta\gamma\alpha\delta}p_\beta p_\gamma\nabla q_\delta)-L_{\beta\gamma\alpha\delta}p_\beta p_\gamma q_\delta+M_{\beta\gamma\delta\alpha}\nabla(p_\beta p_\gamma q_\delta)\nabla h\\&-M_{\beta\gamma\alpha\delta}p_\beta p_\gamma\nabla q_\delta\nabla h+\frac{\partial Z_\beta^\zeta}{\partial h}X_\gamma^\zeta Y_\alpha^\zeta f_\beta p_\gamma\nabla\zeta\nabla h+X_\beta^\zeta X_\gamma^\zeta\frac{\partial Y_\delta^\zeta}{\partial h}Y_\alpha^\zeta p_\beta p_\gamma q_\delta\nabla\zeta\nabla h=0\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}&E_{\alpha\beta}\frac{\partial q_\beta}{\partial t}+F_{\beta\alpha\gamma}\nabla f_\beta\nabla q_\gamma+G_{\beta\alpha\gamma}f_\beta q_\gamma+H_{\beta\alpha\gamma}f_\beta\nabla q_\gamma\nabla h+I_{\beta\alpha\gamma}\nabla f_\beta\cdot q_\gamma\nabla h\\&+K_{\alpha\beta\gamma\delta}p_\beta\nabla q_\gamma\nabla q_\delta+L_{\alpha\beta\gamma\delta}p_\beta q_\gamma q_\delta+2M_{\alpha\beta\gamma\delta}p_\beta q_\gamma\nabla q_\delta\nabla h=0\end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}&Z_\beta^\zeta\frac{\partial f_\beta}{\partial t}+X_\beta^\zeta Y_\gamma^\zeta p_\beta\frac{\partial q_\gamma}{\partial t}+g\zeta+\frac{1}{2}Z_\beta^\zeta Z_\gamma^\zeta\nabla f_\beta\nabla f_\gamma+\frac{1}{2}\frac{\partial Z_\beta^\zeta}{\partial z}\frac{\partial Z_\gamma^\zeta}{\partial z}f_\beta f_\gamma+\frac{\partial Z_\beta^\zeta}{\partial h}Z_\gamma^\zeta f_\beta\nabla f_\gamma\nabla h\\&+Z_\beta^\zeta X_\gamma^\zeta Y_\delta^\zeta\nabla f_\beta\cdot p_\gamma\nabla q_\delta+\frac{\partial Z_\beta^\zeta}{\partial z}X_\gamma^\zeta\frac{\partial Y_\delta^\zeta}{\partial z}f_\beta p_\gamma q_\delta+\frac{\partial Z_\beta^\zeta}{\partial h}X_\gamma^\zeta Y_\delta^\zeta f_\beta p_\gamma\nabla q_\delta\nabla h+Z_\beta^\zeta X_\gamma^\zeta\frac{\partial Y_\delta^\zeta}{\partial h}\nabla f_\beta\cdot p_\gamma q_\delta\nabla h\\&+\frac{1}{2}X_\beta^\zeta X_\gamma^\zeta Y_\delta^\zeta Y_\varepsilon^\zeta p_\beta p_\gamma\nabla q_\delta\nabla q_\varepsilon+\frac{1}{2}X_\beta^\zeta X_\gamma^\zeta\frac{\partial Y_\delta^\zeta}{\partial z}\frac{\partial Y_\varepsilon^\zeta}{\partial z}p_\beta p_\gamma q_\delta q_\varepsilon+X_\beta^\zeta X_\gamma^\zeta\frac{\partial Y_\delta^\zeta}{\partial h}Y_\varepsilon^\zeta p_\beta p_\gamma q_\delta\nabla q_\varepsilon\nabla h=0\end{aligned} \tag{15}$$

4. 結　論

変分法を用いて、渦度を考慮した非線形緩勾配方程式を導いた。初期状態において渦度が存在する領域に伝播する非線形波や、渦度が生成する砕波帯内の波・流れ場等の数値解析に有効だろう。解析の対象に応じて、境界の摩擦や形状または砕波に伴う渦度の生成項と運動量の拡散項を方程式系に付加しておく必要がある。

参考文献: 磯部雅彦 (1994), 土木学会論文集, No. 491/(II)-27, pp. 1–14.; Bateman, H. M. A. (1931), Cambridge Univ. Press, pp. 164–169.; Luke, J. C. (1967), J. Fluid Mech., Vol. 27, pp. 395–397.