

有限要素法拡張カルマンフィルタを用いた入射波の同定

中央大学 学生員 ○西脇 康
中央大学 正 員 川原 睦人

1 はじめに

潮汐とは主として月および太陽の引力に起因する海面の高さの緩やかな周期変化をいう。これによって生じる流れを潮流と称している。潮流は拡散と物質の輸送にきわめて重要な役目をもたらす。

近年、土木事業は環境影響を十分考慮した諸調査をしなければならない。この中で、埋め立てなどによって潮流がどのように変わるのかを予測することも必要となる。この時、数値解析により海域特性を把握する方法がある。東京湾の海域の潮流を知る為に、観測地点が数点しかない東京湾において入射波を求めることは境界値問題として大変重要である。今回、東京湾で表わされる潮汐は主要4分潮で表わされるものとする。この主要4分潮とは一見不規則に見える潮汐だが、実は単純な波が重なってできたものであり、この単純な波が4つ重なってできた波である。

実観測値は真値と雑音で構成される。そこで、実観測値を使って物理現象を捉える際、そのままではデータを使う事はできない。このため得られたデータを補間したり、平均をとったりする。雑音を含めた全てのデータを有効的に使うために、カルマンフィルタや拡張カルマンフィルタを用いる。このカルマンフィルタと拡張カルマンフィルタは、雑音問題を解く際によく使われる、最小乗法を用いている。

カルマンフィルタは線形モデルであるが、拡張カルマンフィルタは非線形モデルである。この場合、拡張カルマンフィルタは非線形方程式を線形方程式に変形して、カルマンフィルタを用いる。

本論文では同定方法として、有限要素法を組み込んだ拡張カルマンフィルタを用いている。

2 有限要素解析

2.1 浅水長波流れの基礎方程式

線形化した浅水長波方程式は、

$$\langle \text{運動方程式} \rangle \quad u_i + g\eta_{,i} = 0 \quad (1)$$

$$\langle \text{連続の式} \rangle \quad \dot{\eta} + hu_{i,i} = 0 \quad (2)$$

ここで、 u_i はそれぞれ x, y 方向の流速、 η は水位変動量を示す。 h は水深、 g は重力加速度である。

2.2 有限要素方程式

三角形要素内部を、内挿補間して重み関数には、ガレキン法を適用する事により空間方向の離散化を行う。時間方向の離散化にはこれを、陽的オイラー法を用いて有限要素方程式を作る

$$\bar{M}u_i^{n+1} = \bar{M}u_i^n - \Delta t g H_i \eta^n \quad (3)$$

$$\bar{M}\eta^{n+1} = \bar{M}\eta^n - \Delta t h H_i u_i^n \quad (4)$$

但し、 $\bar{M} = \epsilon M + (1 - \epsilon)M$
e: ランピングパラメータ

となる。

3 拡張カルマンフィルタ

3.1 状態空間モデル

拡張カルマンフィルタの基礎方程式は以下に示す非線形方程式である。

$$\langle \text{システムモデル} \rangle \quad x_{n+1} = f_n(x_n) + w_n \quad (5)$$

$$\langle \text{観測モデル} \rangle \quad y_n = h_n(x_n) + v_n \quad (6)$$

ここで x_n は、状態ベクトルである。

非線形項は f_n, h_n である。 f_n は状態遷移行列、 h_n は観測行列、 y_n は観測値、 v_n はシステムノイズ、 w_n は観測ノイズである。

3.2 仮定

i) システムノイズ、観測ノイズは、ホワイトノイズとする。

ii) 最適推定値 $\hat{x}_n$ 、推定値 x_n^* を式で表すと、

$$\hat{x}_n = E\{x_n | Y_n\}, \quad x_n^* = E\{x_n | Y_{n-1}\} \quad (7)$$

となり、一方それぞれの分散 Γ は、

$$\begin{aligned} P_n &= \text{cov}\{x_n | Y_n\} \\ &= E\{(x_n - \hat{x}_n)(x_n - \hat{x}_n)^T\} \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_n &= \text{cov}\{x_n | Y_{n-1}\} \\ &= E\{(x_n - x_n^*)(x_n - x_n^*)^T\} \end{aligned} \quad (9)$$

とする。但し $Y_n = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ である。

3.3 定式化

式(5),(6)の非線形項 $f_n(x_n), h_n(x_n)$ を推定値 x_n, x_n^* のまわりにテーラー展開すると

$$f_n(x_n) = f_n(x_n) + F_n(x_n - \hat{x}_n) + \dots \quad (10)$$

$$h_n(x_n) = h_n(x_n^*) + H_n(x_n - x_n^*) + \dots \quad (11)$$

となる。ここで F_n, H_n は、

$$F_n = \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n} \right)_{x=\hat{x}_n}, \quad H_n = \left(\frac{\partial h_n}{\partial x_n} \right)_{x=x_n^*} \quad (12)$$

である。従って、この式(10),(11)を2次の項まで考慮して、式(5),(6)に代入すると、以下のような線形の式に、書き換えられる。

$$x_{n+1} = f_n(x_n) + F_n x_n - F_n \hat{x}_n + w_n \quad (13)$$

$$y_n = h_n(x_n^*) + H_n x_n - H_n x_n^* + v_n \quad (14)$$

式(13)の $f_n(\hat{x}_n)$ と $F_n \hat{x}_n$ は、観測値より得られ、式(14)の $h_n(x_n^*)$ と $H_n x_n^*$ も、観測値より得られる。

ベイズの公式に、仮定を代入すると、

キーワード：有限要素法、拡張カルマンフィルタ、主要4分潮

中央大学大学院理工学研究科 (〒 112-8551 東京都文京区春日 1-13-27, TEL 03-3817-1814, FAX 03-3817-1803)

<最適推定値> $\hat{x}_n = x_n^* + P_n H_n^T R_n^{-1} (y_n - h_n(x_n^*))$ (15)

<カルマンゲイン> $K_n = \Gamma_n H_n^T (R_n + H_n \Gamma_n H_n^T)^{-1}$ (16)

<推定誤差分散>

$$P_n = (I - K_n H_n) \Gamma_n (I - H_n^T K_n^T) + K_n R_n K_n^T \quad (17)$$

が、導かれる。

この時、今回はパラメータは一定値であるため、パラメータの項の Q を 0 とした。

4 数値解析例

東京湾を 116 節点 181 要素の下記(図1)の有限要素分割で行ってみる。観測地点は気象庁より観測されている千葉、東京(晴海)、川崎、横浜(山ノ内)、横須賀の5つの地点と流入地点の計6個所とした。

この際、ランピングパラメータは 0.90 とする。尚、初期条件は全節点において、流速及び、波高は 0 とする。入射条件として、下の湾入口を S_2 境界として以下の式により主要4分潮の入射波を送る。

$$\eta = \sum_{i=1}^4 a_i \sin \left(\frac{2\pi t}{T_i} + k_i \right) \quad (18)$$

ここで各パラメータを表1に示す。

表1 潮汐定数

i	sing	a(m)	Δt	T	k(rad)
1	M_2	0.522	10.0s	12h25m	2.790
2	S_2	0.253	10.0s	12h00m	3.300
3	K_1	0.244	10.0s	23h56m	3.266
4	O_1	0.199	10.0s	25h49m	2.840

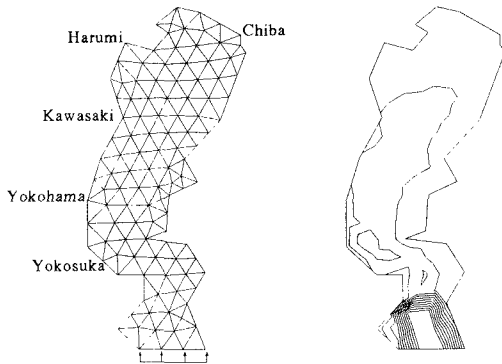


図1 観測地点を配置した有限要素分割図と水深図

この時、擬似観測値として観測地点で得られた水位変動量の結果に、ノイズを加えてこれらを観測値とする。

パラメータの周期は既知であるが振幅と位相は各地点により異なる為、振幅と位相が未知パラメータとなる。その為、 $f_k(x)$ マトリックスは以下の様書き表される。

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ \eta \\ \eta_{in} \end{Bmatrix}_{n+1} = \begin{bmatrix} \Phi \\ \sum_{i=1}^4 a_i \sin \left(\frac{2\pi t}{T_i} + k_i \right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ \eta \\ \eta_{in} \end{Bmatrix}_n$$

$$\begin{Bmatrix} a_i \\ k_i \end{Bmatrix}_{n+1} = \begin{bmatrix} I \\ I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_i \\ k_i \end{Bmatrix}_n \quad (19)$$

ここで、 Φ は有限要素方程式である。一方、 $h_k(x)$ マトリックスは状態量の一部である水位変動量を観測値とし

ているため、非線形項とはならず 1 と 0 からなるマトリックスとなる。

振幅の推定

主要4分潮の振幅の推定の結果を表2に示す。ここで、4つの位相は分かっているものとする。収束判定を行っていない為、繰り返し回数は観測値に依存する。

3千回で収束した為今回、繰り返し回数は全観測値分計算する必要はなかった。同定結果はよい一致を示した。この結果を表2に示す。

表2 推定値と真値との比較

	M_2	S_2	K_1	O_1
真値(m)	0.522	0.253	0.244	0.199
推定値(m)	0.523	0.253	0.241	0.200
誤差(%)	0.191	0.000	1.230	0.503

最大誤差は約1%で、よい推定といえる。

位相の推定

次に主要4分潮の位相を推定した。この結果を表3に示す。ここで4つの振幅は分かっているものとする。主要4分潮の位相の同定の際、各パラメータはすぐに収束しなかった。その為、30万回すべての観測値を使わなければならなかった。それにもかかわらず、推定結果は真値によく一致したとはいえなかった(表3)。

表3 推定値と真値との比較

	M_2	S_2	K_1	O_1
真値(rad)	2.790	3.300	3.266	2.840
推定値(rad)	2.789	-2.985	-3.194	3.097
誤差(%)	0.036	*0.067	*5.867	9.049

* S_2 と K_1 の場合、推定結果はマイナスであった。これらは位相である為、真値から 2π 引いた値と比較した。

5 考察

本研究では主要4分潮の潮汐定数の各4つの振幅、又は4つの位相を同定した。振幅の推定は約3千回で収束した。一方位相の推定の場合、繰り返ししが30万回でも十分一致した結果になりませんでした。

位相の推定の場合、なぜパラメータがすぐに収束しないのか? 拡張カルマンフィルタ問題で、パラメータの同定は観測値とその状態量の誤差で決定する。そこでカルマンゲインが計算され、誤差に掛け合わす。カルマンゲインは1万回位で小さい値に収束してしまう。この為、パラメータが新しく更新されにくくなる。

更にカルマンフィルタ問題で、流入条件を送らずにカルマンゲインの重みのみによって入射波を推定できると言うことは承知のことである。しかしこの場合、位相のズレが生じる。結局、正しい入射波の推定がうまくいかなくても、観測値とその状態量の誤差は小さくなる。

拡張カルマンフィルタのアルゴリズム上、マトリックス計算はメッシュ数に依存する。この為、多くの $cpu-time$ を費やすこととなる。本研究では、 $cpu-time$ は約 1.168[sec/step] となった。より多くのメッシュに増やそうとしても、沢山 $cpu-time$ がかかる為、パラメータを推定する事は困難である。

そこで本手法を使う際、何の問題に適用できるのかをよく考えなければならない。

【参考文献】

- 1) 川原 睦人: 有限要素法流体解析, 日科技連, (1983).
- 2) 片山 徹: 応用カルマンフィルタ, 朝倉書店, (1983).
- 3) 星谷 勝: データ解析と応用, 鹿島出版会, (1991).
- 4) 岩垣 雄一: 海岸工学, 共立出版株式会社, (1979).