Ⅱ-112

安定化Space-Time有限要素法による境界移動を考慮した浅水長波流れ解析

中央大学大学院　学生員　○菅野 諭
中央大学　正会員　樫山 和男

1. はじめに

津波や高潮などの数値計算を行う場合，水位の上昇に伴う水際線の移動を定量的にとらえる必要がある．この場合，計算領域が時々刻々変化する，移動境界を考慮した数値解析を行う必要性がある．これに対してこれまで幾つかの移動境界を取り扱う手法が提案されているが，それらの多くは質量収支の保存が満たされていないという問題点がある．

そこで本研究では，上記の問題点を解決するために，時空間両方について有限要素近似を用いる手法である，移動境界問題に対して質量収支を厳密に扱うことができるSpace-Time有限要素法[1)]を境界移動を考慮した浅水長波流れ解析に適用し，その有効性を検討するものである．なお安定化手法としては，上流化効果を取り入れ安定化を図る手法であり，安定化手法の主流になっているSUPG/PSPG法[2)]を用いている．

2. 基礎方程式

基礎方程式として以下に示す非粘性を仮定した保存形の非線型，非定常の浅水長波方程式を用いる．

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}+\mathbf{A}_i\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i}=\mathbf{R} \qquad in \quad \Omega_t \qquad (1)$$

ここに，$\mathbf{U}$，$\mathbf{R}$，$\mathbf{A}_i$ は以下に示される．

$$\mathbf{U}=\begin{bmatrix} H \\ U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} H \\ Hu \\ Hv \end{bmatrix},\mathbf{R}=\begin{bmatrix} 0 \\ gH\frac{\partial h}{\partial x_1} \\ gH\frac{\partial h}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_1=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ c^2-u^2 & 2u & 0 \\ -uv & v & u \end{bmatrix},\mathbf{A}_2=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -uv & v & u \\ c^2-v^2 & 0 & 2v \end{bmatrix}$$

ここに，u,vはそれぞれx_1,x_2方向の流速成分，ζは水位上昇量，cは波速，Hは全水深$(=h+\zeta)$，gは重力加速度，hは初期水深を表す．

3. 有限要素方程式

時空間の離散化に対し安定化Space-Time有限要素法を用いて基礎方程式の重み付き残差方程式を導くと次式のようになる．また要素としては，空間方向に三角形（時空間に三角柱）である要素を用い，時間，空間ともに1次の補間関数を用いた．

$$\int_{Q_n}\mathbf{U}^*\cdot\left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}+\mathbf{A}_i\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i}-\mathbf{R}\right)dQ$$
$$+\int_{\Omega_n}(\mathbf{U}^*)_n^+\cdot((\mathbf{U})_n^+-(\mathbf{U})_n^-)d\Omega$$
$$+\sum_{e=1}^{(n_{el})_n}\int_{Q_n^e}\tau\mathbf{A}_k^T\left(\frac{\partial \mathbf{U}^*}{\partial x_j}\right)\cdot\left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}+\mathbf{A}_i\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i}-\mathbf{R}\right)dQ$$
$$+\sum_{e=1}^{(n_{el})_n}\int_{Q_n^e}\delta\left(\frac{\partial \mathbf{U}^*}{\partial x_i}\right)\cdot\left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i}\right)dQ$$
$$=0 \qquad (2)$$

ここにeは要素を表している．また左辺第1項は通常のGalerkin項，第2項は時刻$t=t_n$における解の不連続量を表した項である．第3，第4項が安定化に寄与する項であり，第3項はSUPG法による項，第4項Shock Capturing項と言い，流速，水位を同時補間するために生じる数値振動を抑える働きがある．ここでτは上流化パラメーターであり次式を与える．またδについては，本報告では定数として取り扱っている．

$$\tau=\left[\left(\frac{2}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{2\|u\|}{h}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} \qquad (3)$$

ここで重み関数，近似関数は以下のような座標変換を行い正規化された式を用いる．

$$\mathbf{U}^{*h}=\sum_{j=1}^{nx}\Phi_j\left(\pi_n(\theta)\mathbf{U}^{*h}(\theta_{n+1}^-)+\tilde{\pi}_n(\theta)\mathbf{U}^{*h}(\theta_n^+)\right) \quad (4)$$

$$\mathbf{U}^h=\sum_{j=1}^{nx}\Phi_j\left(\pi_n(\theta)\mathbf{U}^h(\theta_{n+1}^-)+\tilde{\pi}_n(\theta)\mathbf{U}^h(\theta_n^+)\right) \quad (5)$$

ここでΦ_jは座標変換された空間における形状関数，πは同じく時間における形状関数で時間方向を一次で補間する場合は以下のようになる．

$$\pi_n(\theta)=(\theta+1)/\Delta t \qquad (6)$$

$$\tilde{\pi}_n(\theta)=(-1-\theta)/\Delta t \qquad (7)$$

なお，時空間積分は，次のように表される．

$$\int_{Q_n}\cdots dQ=\int_{I_n}\int_{\Omega}\cdots d\Omega dt \qquad (8)$$

ここに$I_n=(t_n,t_{n+1})$である．また第2項における$(\cdots)_n^+$，$(\cdots)_n^-$は，それぞれ境界における節点の上側値，下側値を表しており次式で定義される．

$$(\mathbf{U}^h)_n^\pm=\lim_{\varepsilon\to 0}\mathbf{U}(t_n\pm\varepsilon) \qquad (9)$$

4. 節点移動の際に用いる処理

4.1. 節点の移動距離の決定法

節点の移動距離の決定法としては以下のような手順の反復計算によって決定する．①初期値として時刻t_n^+における節点の座標を用る．②水際線の節点における流速から移動量を求める．③移動した領域において再び計算をし，残差の収束から反復計算を行う．ここで収束判定係数は1.0×10^{-4}としている．

Keywords: Space-Time FEM，移動境界問題，浅水長波流れ，
〒112-8551 東京都文京区春日1-13-27
Tel:03-3817-1815,**Fax**:03-3817-1803

4.2. 水際線の節点における流速の補正

計算での変数は $u = Hu$(conservative value) であるため，水際線 (つまり $H = 0$) の所の移動を考えた場合，その節点の移動量を決定する際水際線の節点での実流速が必要となってくる．しかし水深がHがであるためただ単に実流速を求めるために$u = U/H$としただけではゼロ割を起こしてしまうために計算できない．そこで次式のように実流速を定義する．

$$u = \frac{1}{H_e} \sum_a U_a N_a \qquad in \quad \Omega_e \qquad (10)$$

ここで，H^eは要素平均水深であり三角形要素の場合次式とする．

$$H^e = \frac{H_1 + H_2 + H_3}{3} \qquad (11)$$

ここに$H_a (i = 1 \sim 3)$はそれぞれ要素における節点$1 \sim 3$での水深である．以上を用いて実流速の計算には，次式のような最小二乗の形から計算する．ここで左辺が未知ベクトルであり実流速が変数である．右辺は既知ベクトルで計算された保存変数 (conservative value) を用いる．

$$\int_{\Omega_e} w \cdot u d\Omega = \int_{\Omega_e} w \cdot u^e d\Omega \qquad (12)$$

式(10) を式(12) に代入すると以下のようになる．

$$\int_{\Omega_e} w \cdot u d\Omega = \frac{1}{H^e} \int_{\Omega_e} w \cdot U d\Omega \qquad (13)$$

最終的に式(13) から左辺を集中化して実流速を求める．

5. 数値解析例

本手法の有効性を検討する数値解析モデルとして，潮流による水位の上昇に伴う水際線の移動問題を用いる[3]．図-2 のような一様な水深変化の解析領域を用い，境界条件は④での水位を$\zeta = asin(\omega t)$としている．

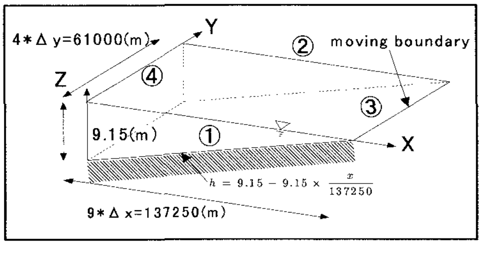

図-2　計算領域図

ここで，$a = 0.305(m)$，$\omega = 2\pi/12.4(hr) = 1.407524 \times 10^{-4}(1/s)$，$g = 9.8(m/s^2)$，また$\Delta t = 223.2(s)$としている[3]．図-3 に前記の水際線における流速補正の有効性の検討として，時刻10000秒までの水際線における流速を補正を行う場合と行わない場合との比較を行った．ここで流速補正を行わない場合は，水深として僅かな量($H = 0.1m$) を与えている．図-4 に1周期までの水位図を示す．

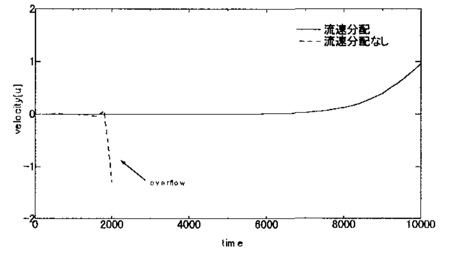

図-3 水際線における流速の時刻歴の比較

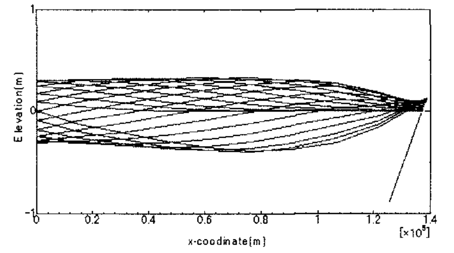

図-4　水位図（全体図）

図-3からわかるように流速補正を行わない場合は，時刻2000秒あたりで数値不安定が生じて発散してしまっているが，流速補正を行うことにより安定した流速を得ることができた．また図-4からは水際線における節点の移動の様子がわかる．

6. おわりに

本報告では，安定化Space-Time有限要素法を移動境界を考慮した浅水長波流れ解析に適用し，その有効性を検討した．具体的な数値モデルとして潮流による水際線の移動問題を用い，そのために必要な流速の補正手法を提案し，節点の移動距離の決定法として反復法による計算法を用いた．

その結果，本手法を用い流速を補正する事により，安定した流速を得ることができた．また水際線における節点の移動の様子をとらえることができた．今後の課題としては実験値との比較による本手法の有効性の検討，アダプティブ法を用いた節点移動を行う予定である．

参考文献

1) Hughes,T.J.R. and Hulbert,G.M. "Space-Time finite element methods for elastodynamics:Formulations and error estimates", *Comp.Meth.Appl.Mech.Engin.*, 66, pp339-363, 1988.
2) Behr.M.and Tezduyar.T, "Finite element solution strategies for large-scale flow simulation", *Comp.Meth.Appl.Mech.Engin.*, 112, pp3-24, 1994.
3) Daniel R.Lynch and William G.Gray, "Finite element simulation of flow in deforming regions ", *J.comp.Phy.*, 36, pp135-153, 1980.