

I - B 481

ライズを持つ長方形板の非線形振動挙動の解析

長崎大学大学院 学生員 ○三堂 聡

長崎大学工学部 フェロー 高橋 和雄

1. まえがき

ドームの屋根や吊り床板で、平板にライズを持たせると剛性が高まり構造上有利であるが、動的荷重が作用する場合は、動座屈や振動の問題が生じてくるため、非線形振動の解析が必要になる。本研究は、これまでの偏平アーチの取り扱い¹⁾を板構造に拡張して動的な非線形挙動を解析する。解析にあたっては、ライズを持つ長方形板の非線形運動方程式を Galerkin 法を適用して1自由度系に近似し、さらに調和バランス法を用いて連立非線形代数方程式に変換し、Newton-Raphson 法により解析する。ライズ比、縦横比、荷重強度などをパラメーターに数値解析を行ない、非線形振動特性を明らかにする。

2. 運動方程式

図—1 のような長方形板の初期形状を w_0 、たわみを w とすると、ライズをもつ長方形板の運動方程式と適合条件式は、次のように表される²⁾。

$$L(w, F) = \rho d \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D \nabla^4 w - p_0 \cos \Omega t - d \left\{ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial x \partial y} \right\} = 0 \quad (1)$$

$$\nabla^4 F = E \left[\left\{ \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial x \partial y} \right\}^2 - \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial y^2} - \left\{ \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right\} \right] \quad (2)$$

ここに、 t : 時間、 d : 板厚、 ρ : 板の密度、
 p_0 : 荷重強度、 F : Airy の応力関数、 E : ヤング率、
 $D = Ed^3 / 12(1 - \nu^2)$ 、 ν : ポアソン比、

$$\Omega : \text{励振円振動数}, \quad \nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}.$$

板の境界条件は、曲げに対して全周辺単純支持 (case1) と全周辺固定支持 (case2) とし、面内変位 u, v は固定とする。

3. 解法

式(1)、(2)の解を境界条件を満足するように次式(3)及び(4)のように仮定し、ライズの形状を次式(5)及び(6)のように仮定する。

$$w = dT(t) \sin \frac{\pi}{a} x \sin \frac{\pi}{b} y \quad (3) \quad w_0 = e_0 d \sin \frac{\pi}{a} x \cos \frac{\pi}{b} y \quad (5) \quad : \text{case1}$$

$$w = \frac{1}{4} dT(t) \left(1 - \cos \frac{2\pi}{a} x \right) \left(1 - \cos \frac{2\pi}{b} y \right) \quad (4) \quad w_0 = \frac{1}{4} e_0 d \left(1 - \cos \frac{2\pi}{a} x \right) \left(1 - \cos \frac{2\pi}{b} y \right) \quad (6) \quad : \text{case2}$$

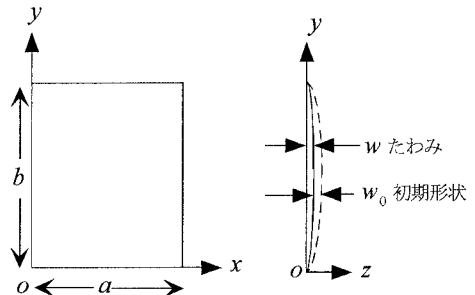
ここに、 $T(t)$: 未知の時間関数、 e_0 : 板厚で無次元化した初期変形の大きさ (ライズ比)。

解析の手順として、先ず式(2)より応力関数 $F = F_p + F_c$ (ここに、 F_p : 式(2)の特解、 F_c : 式(2)の余解。)を与えられた、たわみ及び初期形状の仮定を用いて解き、面内方向の境界条件の下に決定する。次いで、運動方程式(1)にたわみの仮定と得られた応力関数を代入して、Galerkin 法を適用すると、連立非線形偏微分方程式は次のような時間に関する非線形常微分方程式に変換される。

$$\ddot{T} + 2h\dot{T} + (1 + 2e_0^2\alpha)T + 3e_0\alpha T^2 + \alpha T^3 = \delta p \cos \omega t \quad (7)$$

キーワード : 長方形板、非線形振動、ライズ、分岐

〒852 長崎市文教町1-1-4 長崎大学工学部社会開発工学科 TEL 095-848-9639 FAX 095-848-9639



図—1 ライズを持つ長方形板の一般図

ここに, α, δ : 係数, $p = p_0 b^4 / Dd$: 荷重強度,
 $\omega = \Omega / \omega_{11}$: 無次元加振円振動数, $\mu = a / b$: 縦横比,
 $\tau = \omega_{11} t$: 無次元時間, h : 減衰定数.

上式の解を次のように仮定する.

$$T = c_0 + c_1 \cos \omega \tau + c_{1/2} \cos \frac{\omega}{2} \tau + s_1 \sin \omega \tau + s_{1/2} \sin \frac{\omega}{2} \tau \quad (8)$$

ここに, c_0, c_1, s_1 : 付随型の振幅成分, $c_{1/2}, s_{1/2}$: 分岐型の振幅成分. 式(8)を式(7)に代入して, 調和バランス法を適用すれば連立非線形代数方程式が得られ, これに Newton-Raphson 法を用いて解けば, 振幅成分が得られる.

4. 解析結果

(1) 非線形自由振動特性 図—2, 3, 4 は, 正方形板($\mu = 1$, $\nu = 0.3$, $h=0$) の非線形自由振動数に及ぼすライズの影響を示す. 縦軸は振幅の変動成分 c_1 及び直流成分(静的応答成分) c_0 をそれぞれ示し, 横軸は非線形自由振動数を線形1次固有振動数で無次元化した非線形自由振動数 ω である. 図—2, 3 は境界条件が全周辺単純支持(case1)で, 図—4 は全周辺固定支持(case2)である. なお, 図—2 には Runge-Kutta-Gill 法による数値シミュレーションの結果が●印を用いてプロットされているが, 解析解とシミュレーションによる結果は一致する. 図—2 のように平板($e_0 = 0$) の場合, 振動数は振幅 c_1 の増大とともに単調に増加するのみであるが, ライズ比が板厚程度($e_0=1$) になるとライズの影響が効いてくる. 振幅が小さい場合には, 軟化バネ特性を示し, 振幅がライズ比より大きくなる硬化バネの特性を示す. 図—3 に注目すると, 直流成分は振幅の増加とともにライズ比 e_0 を打ち消す方向に作用し, $e_0 + c_0$ が小さくなる領域で軟化バネ特性を示す. さらに振幅が大きくなると $e_0 + c_0 \approx 0$ となり, ライズのある長方形板は, 平板に一致する. 図—4 より, 境界条件が異なる場合でもライズの影響を受け, 軟化・硬化バネの両特性を持ち, case1 に比べ case2 のほうが軟化・硬化バネの特性は弱い.

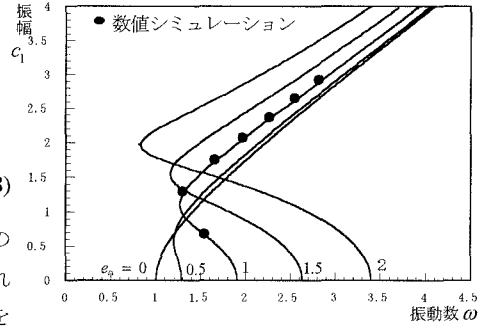
(2) 非線形強制振動 図—5 に, $e_0 = -1$ の正方形板の強制振動の応答曲線を示す. 縦軸は振幅成分 $c_1, c_{1/2}, s_{1/2}$ で, 横軸 ω は無次元励振振動数である. 主共振 c_1 と 1/2 分数波共振 $c_{1/2}, s_{1/2}$ が表われ, 1/2 分数波共振の応答の発生領域は広がる.

5. まとめ

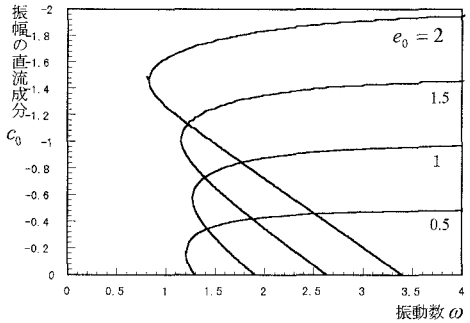
本研究では境界条件が2ケースの非線形自由振動を解析したが, 非線形自由振動に及ぼす縦横比などのパラメーターの影響を当日発表する予定である.

参考文献

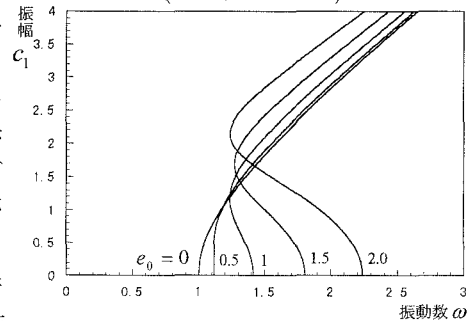
- 1) 高橋和雄・太田晶一: 構造工学論文集, Vol.42A, pp.55-61, 1996.3.
- 2) 関谷壮・斎藤渥: 薄板構造力学, 共立出版, pp.161-237, 1968.



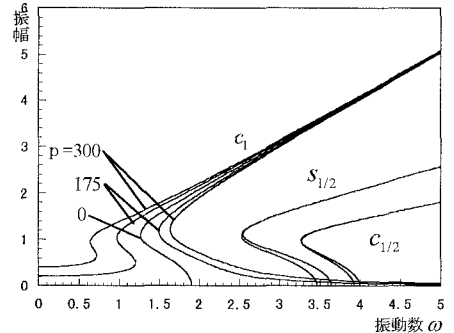
図—2 非線形自由振動(case1, $\mu = 1, \nu = 0.3$)



図—3 直流成分 c_0 と無次元振動数 ω の関係



図—4 非線形自由振動(case1, $\mu = 1, \nu = 0.3$)



図—5 応答曲線(case1, $e_0 = -1, \mu = 1$)