

I - B 201

半無限均質波動場を表す Green 関数の
連続スペクトル分解表示と固有関数の性質

東京理科大学大学院理工学研究科 学生員 中川 英則
 東京大学大学院工学系研究科 学会員 佐伯 昌之
 東京理科大学理工学部 正会員 東平 光生

1. はじめに

成層構造を持つ波動場を表す Green 関数について、その数理解釈は Lamb など多くの研究者によって与えられてきた。その中で、近年、著者の一人である東平は、成層構造を有するスカラー波動場の Green 関数を離散および連続スペクトルに対する固有関数展開の見地から統一的に表現することに成功した^(*)。これによれば、Green 関数を構成する波数積分の中で留数定理による寄与は離散スペクトルとして、分岐点回りの積分による寄与は連続スペクトルとして捉えることができる。本論文では、この結果を受け、半無限均質波動場の Green 関数を連続スペクトルに対する固有関数で表現することを試みるとともに、連続スペクトルに対する固有関数の性質について検討を加える。

2. 半無限均質波動場の Green 関数とその分解

本論文では Fig.1 に示すような均質な半無限の弾性流体を扱う。Fig.1 において ρ は媒質の質量密度、 α は音波速度を表している。ここでは、半無限均質波動場ということから、自由境界面での反射波の影響を考慮するため、鏡像点を Fig.1 に示すように配置している。ここに、震源 r' に対する鏡像点を r'_i で表す。

この時、この波動場を表す Green 関数は次式で与えられる。

$$G(r, r') = \frac{e^{-ik_\alpha |r - r'|}}{4\pi |r - r'|} - \frac{e^{-ik_\alpha |r - r'_i|}}{4\pi |r - r'_i|} \dots\dots\dots (1)$$

さらに、式(1)で表される Green 関数は、次式の Sommerfeld 積分の形で書き表すことができ、そこに $|z| = |z'|$, $r' = r'_i$, $|z - z'| = |z + z'|$ なる関係を用いることで、以下の様に展開される。

$$G(r, r') = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty k J_0(kr) E_k(z, z') dk$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^\infty k H_0^{(2)}(kr) E_k(z, z') dk \dots\dots\dots (2)$$

ここに、 $E_k(z, z')$ は次式で表わされる関数である。

$$E_k(z, z') = \frac{1}{2\sqrt{k^2 - k_\alpha^2}} \left\{ e^{-\sqrt{k^2 - k_\alpha^2}(z' - z)} - e^{-\sqrt{k^2 - k_\alpha^2}(z - z')} e^{-2z'\sqrt{k^2 - k_\alpha^2}} \right\}$$

$$\dots\dots\dots (0 \leq z \leq z') \dots\dots\dots (3)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{k^2 - k_\alpha^2}} \left\{ e^{-\sqrt{k^2 - k_\alpha^2}(z - z')} - e^{-\sqrt{k^2 - k_\alpha^2}(z' - z)} e^{-2z'\sqrt{k^2 - k_\alpha^2}} \right\}$$

$$\dots\dots\dots (z' \leq z) \dots\dots\dots (4)$$

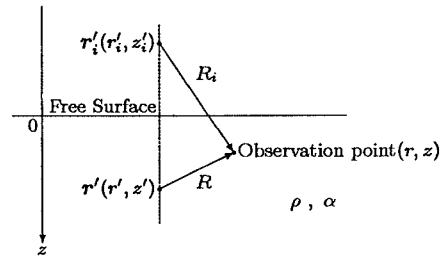


Fig.1 Point source and the image point in a homogeneous liquid space.

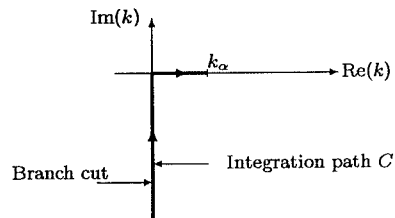


Fig.2 Integration path C on the complex k plain.

(*) T. Touhei: Green's Function for a Layer Acoustic Half-space Represented in Terms of Discrete and Continuous Spectrums, *Int. Journal of soil and structures* (invited), submitted.

キーワード Green's function, continuous spectrum, improper eigenfunction, spectral decomposition

さらに、式(4)において波数 k を複素領域に拡張し、論文(*)で述べられている理論を用いることで、式(4)で表される Green 関数は最終的に以下のような形に固有関数展開される。

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{i}{4} \int_C H_0^{(2)}(kr) Q_k(z, z') |dk| \dots\dots\dots (5)$$

ここに、積分路 C はFig.2に示される経路であり、また、 $Q_k(z, z')$ 、 $\psi_k(z)$ 、 a^2 は次式で与えられる。

$$Q_k(z, z') = \psi_k(z) \psi_k(z') \rho \dots\dots\dots (6)$$

$$\psi_k(z) = \frac{1}{a} \sin(\sqrt{k_a^2 - k^2} z) \dots\dots\dots (7)$$

$$a^2 = \frac{\rho \sqrt{k_a^2 - k^2} \pi}{2|k|} \dots\dots\dots (8)$$

3. 固有関数の性質

ここでは、異なったいくつかの波数 k に対して関数 $Q_k(z, z')$ を計算することで、連続スペクトルに対する固有関数の性質を検討する。波数は $k = 1.0, -5i$ /km の2通りの場合を考える。数値計算の結果はFig.3, Fig.4に示される通りである。

波数 k が積分路 C 上を実軸から虚軸上の無限大の方向に進むにつれて $Q_k(z, z')$ の振動は速くなっていく。また、波数 k の値により、関数 $Q_k(z, z')$ の振幅に変化があることが分かる。そこで、波数 k と関数 $Q_k(z, z')$ の振幅の大きさとの関係を考える。

ある波数に対し、変数 z について $0.0\text{km} \leq z \leq 5.0\text{km}$ の範囲で関数 $Q_k(z, z')$ を計算し、その中で最大の振幅を求める。この最大の振幅をこの波数に対する値としてプロットするとFig.5が得られる。図より、波数 k が実数領域にある時、その絶対値 $|k|$ が大きくなればなるほど $Q_k(z, z')$ の振幅は大きくなり、一方、波数が複素数の範囲にある時は、その絶対値の大きさ $|k|$ に関わらず $Q_k(z, z')$ は振動を続けることが分かる。 $|k|$ が十分に大きな値をとる時、Fig.5の振幅は一定値 $2/\pi (\approx 0.64)$ に近づくが、これは、式(8)について $k \rightarrow -i\infty$ とすることにより得られる。

4. 結論

本論文では、均質半無限弾性流体の Green 関数が、連続スペクトルに対する固有関数展開の形で統一的に表現できることが明らかになった。また、波数 k がcut上を実軸から虚軸の $-i\infty$ 方向に行くにつれて、関数 $Q_k(z, z')$ の振動は速くなり、さらに、その振幅は実軸上では分岐点に近づくにつれて発散し、虚軸上では振動を続ける一定の値に収束して行くことが明らかになった。

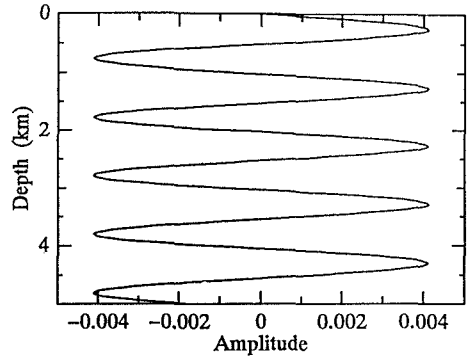


Fig.3 Improper eigenfunction for continuous spectrum (wavenumber = 1.0 /km)

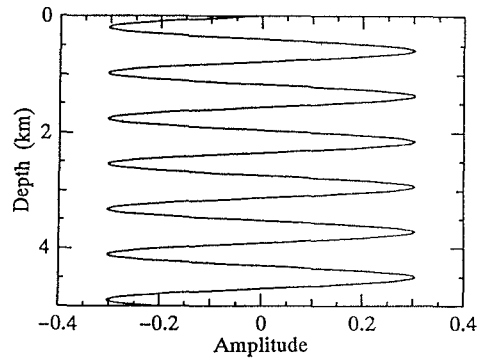


Fig.4 Improper eigenfunction for continuous spectrum (wavenumber = $-5i$ /km)

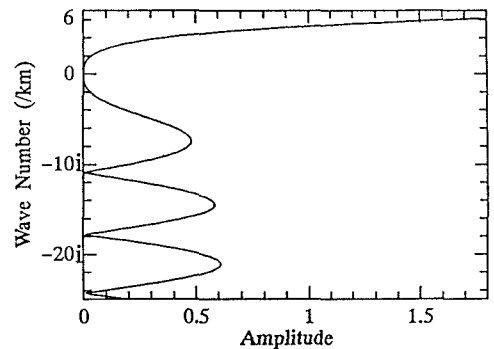


Fig.5 Comparision between contribution of continuous spectrum and the Principle of reflection (imaginary part).