

I - A311

不完全合成はりの曲げおよび座屈理論と解析について

北海道大学大学院工学研究科

フェロー 佐藤 浩一

フジタ (株)

正会員 劉 澤典

北海道大学大学院工学研究科

フェロー 林川 俊郎

北海道大学大学院工学研究科

正会員 小幡 卓司

北海道大学大学院工学研究科

正会員 平沢 秀之

北海道大学大学院工学研究科

学生員 橘 健太郎

1. まえがき

異種材料を合成し複合構造物として使用する主な目的は、単一材料では得ることのできない望ましい力学特性を作り出すことである¹⁾。通常の合成はり、合成度 100%と考えて解析しているが、すれ止め(接着剤)の剛性が小さい場合にはすれが生じ、不完全合成はりとして解析しなければならない場合がある。既往の研究において、不完全合成に関する曲げ解析²⁾および不完全合成板に関する座屈解析³⁾が行われている。

本論文の第一の目的は、不完全合成はりの座屈解析理論を、不完全合成はりの曲げ解析理論をふまえた上で系統的に示すことである。第二の目的は、それらの解析を1本の常微分方程式として解く場合と2本の常微分方程式として解く場合とを理論解析および数値解析により比較検討することである。

2. 本論文で用いる断面図と主な記号

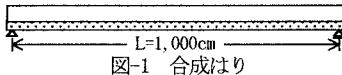


図-1 合成はり

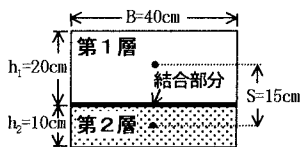


図-2 断面図

合成はり断面図を図-1と図-2に示し、主な記号は次のようである。ここでは等断面で、同材料を想定した層状のものを用いるので、 $E_1=E_2=1.26 \times 10^5 \text{ kgf/cm}^2$ とする。

E_1, E_2 : 第1, 2層材のヤング率、 $n=E_2/E_1$ 、 $I_v=I_2+I_1/n+A_1S_1S/n$: 合成はり断面二次モーメント、 I_1, I_2 : 第1, 2層材断面二次モーメント、 A_1, A_2 : 第1, 2層材の断面積、 $A_v=A_2+A_1/n$: 合成断面の断面積、 S_1, S_2 : 第1, 2層材重心と合成断面重心との距離、 $S=S_1+S_2$: 第1, 2層材の重心距離、 p : 荷重強度、 k : パネ定数、 M_{vv} : 完全合成はりの曲げモーメント。

3. 不完全合成はりの曲げ解析理論

不完全合成はりの曲げ解析におけるたわみ W_{ve} に関する1本の微分方程式は既往の研究²⁾により次の通りである。

$$E_2 I_v \cdot W_{ve}^{IV} - E_2 I_v \kappa^2 \cdot W_{ve}'' = \kappa^2 \cdot M_{vv} + \frac{n I_v}{n I_2 + I_1} \cdot p \quad (1)$$

$$\text{ここで、} \kappa^2 = \frac{n I_v}{n I_2 + I_1} \cdot \frac{k n}{E_2 A_1} \cdot \frac{S}{S_1} \quad (2)$$

式(1)の右辺の第1項の M_{vv} は、完全合成はりの曲げモーメントであり、式(1)の右辺の全体が載荷荷重となる。この式(1)を解けば、直接不完全合成はりのたわみ W_{ve} を求めることができる。

一方、不完全合成はりのたわみ W_{ve} と完全合成はりのたわみ W_e との差を W_v とすれば、不完全合成はりの曲げ解析に関する次の2本の微分方程式が得られる²⁾。

$$\begin{cases} E_2 I_v \cdot W_v^{IV} = p \\ E_2 I_e \cdot W_e^{IV} - E_2 I_e \kappa^2 \cdot W_e'' = p \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} E_2 I_e \cdot W_e^{IV} - E_2 I_e \kappa^2 \cdot W_e'' = p \end{cases} \quad (4)$$

$$\text{ただし、} I_e = I_v \cdot \frac{n I_2 + I_1}{A_1 S_1 S} \quad (5)$$

式(3)と式(4)において境界条件を与えれば、剛性マトリックス法などによりたわみ W_v, W_e が求まる。しかし、2本の微分方程式(式(3)と式(4))を解くだけでは、不完全合成はりのたわみ W_{ve} を直接求めることができない。不完全合成はりのたわみ W_{ve} は式(6)で求まる。

$$W_{ve} = W_v + W_e = W_v \left\{ 1 + \frac{I_v}{I_e} \cdot \beta \right\} = W_v \{ 1 + \gamma \} \quad (6)$$

$$\text{ただし、} \beta = 1 / \left(1 + \frac{\kappa^2 I_2}{\pi^2} \right) = 1 - \alpha \quad ; \quad \gamma = \frac{I_v}{I_e} \cdot \beta \quad (7)$$

なお、式(1)が式(3)、(4)と理論的にも数値的にも同一であることを確認している。

4. 不完全合成はりの座屈解析理論

4.1 座屈解析に関する微分方程式

まず、座屈して曲がった状態のある部材の微小要素 dx を取り出すと、図-3のように、 x 方向の荷重 P は部材軸直角方向の分力

$$P \frac{dW}{dx} - P \left(\frac{dW}{dx} + \frac{d^2 W}{dx^2} dx \right) = -P \frac{d^2 W}{dx^2} dx \quad (8)$$

をもたらす、単位長さあたりには

$$p = -P \frac{d^2 W}{dx^2} \quad (9)$$

なる横荷重となる。

Keywords: 不完全合成はり、すれ止め、曲げ解析、座屈解析

北海道大学大学院工学研究科 (〒060-8628 札幌市北区北13条西8丁目 Tel: 011-706-6171 Fax: 011-726-2296)

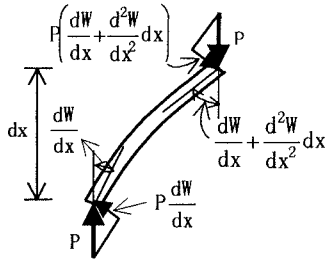


図-3 微小部材の力のつり合い

なお、不完全合成はりに作用する分布荷重 p は、はりに生じる横荷重と同値であるから、次の二式が成り立つ。

$$\frac{nI_v}{nI_2 + nI_1} \cdot p = -\frac{nI_v}{nI_2 + nI_1} \cdot N_{ve} \cdot W_{ve}'' \quad (10)$$

$$W_v'' = \frac{N_{ve}}{N_v} \cdot W_{ve}'' \quad (11)$$

したがって、式(10)と式(11)を式(1)に代入すれば、次のような式が得られる。

$$E_2 I_v W_{ve}^{IV} - E_2 I_v \kappa^2 \cdot W_{ve}'' = -E_2 I_v \kappa^2 \cdot \frac{N_{ve}}{N_v} \cdot W_{ve}'' - \frac{nI_v}{(nI_2 + nI_1)} \cdot N_{ve} \cdot W_{ve}'' \quad (12)$$

この式(12)が不完全合成はりの座屈解析に関する1本の微分方程式であり、本研究で誘導したものである。さらに、式(12)は次式のように表示することができる。

$$E_2 I_v \cdot W_{ve}^{IV} + \eta \cdot W_{ve}'' = 0 \quad (13)$$

$$\text{ここで、} \eta = \left[\left(\frac{E_2 I_v \kappa^2}{N_v} + \frac{nI_v}{(nI_2 + I_1)} \right) N_{ve} - E_2 I_v \kappa^2 \right] \quad (14)$$

である。 η は不完全合成はりに作用する軸力に相当するものである。式(13)は単純支持で等断面のような場合、固有値問題として解けば不完全合成はりの座屈荷重 N_{ve} を直接求めることができる。また、有限要素法でも解析できる。

一方、式(3)、(4)の曲げ解析の場合と同様に次のような2本の座屈解析に関する微分方程式が得られる。すなわち、完全合成はりのたわみ W_v とすれによるたわみ W_e のそれぞれの座屈荷重を N_v 、 N_e とする。

$$\begin{cases} E_2 I_v \cdot W_v^{IV} = -N_v \cdot W_v'' \\ E_2 I_e \cdot W_e^{IV} - E_2 I_e \kappa^2 \cdot W_e'' = -N_e \cdot W_e'' \end{cases} \quad (15)$$

$$(16)$$

式(15)、(16)が本論文で扱う座屈解析に関する2本の常微分方程式である。

単純支持の場合、以上の式(15)と式(16)より $\xi_v^2 = \frac{N_v}{E_2 I_v}$ 、 $\xi_e^2 = \frac{N_e - \kappa^2 E_2 I_e}{E_2 I_e}$ とし、オイラーの理論式より $\sin \xi L = 0$ で展開すれば、座屈荷重 N_v 、 N_e は式(17)と式(18)のようになる。

$$\begin{cases} N_v = E_2 I_v \cdot \frac{\pi^2}{L^2} \\ N_e = E_2 I_e \cdot \left(\frac{\pi^2}{L^2} + \kappa^2 \right) \end{cases} \quad (17)$$

$$(18)$$

しかし、2本の微分方程式（式(15)と式(16)）を解くだ

けでは、不完全合成はりの座屈荷重 N_{ve} を直接求めることができない。ここで、不完全合成はりの座屈荷重 N_{ve} は、式(19)で求めることができる。

$$\frac{1}{N_{ve}} = \frac{1}{N_v} + \frac{1}{N_e} \quad (19)$$

この式(19)の N_{ve} は式(12)で直接求めた N_{ve} と理論的に同一であることを確認している。

また、式(19)は式(20)のようにも表示できる。

$$\frac{1}{N_{ve}} = \frac{1}{N_v} \cdot \left\{ 1 + \frac{I_v}{I_e} \cdot \beta \right\} = \frac{1}{N_v} \cdot \{1 + \gamma\} \quad (20)$$

以上より、不完全合成はりの曲げ解析および座屈解析の微分方程式の誘導と解法は、系統的であることが判明した。

4.2 座屈解析に関する数値解析

本研究は、次の三通りの方法によって、座屈荷重を求めた。一つ目は式(13)、(14)より固有値問題として求めた座屈荷重（1本の微分方程式による）、二つ目は式(13)を有限要素解析で求めた座屈荷重（1本の微分方程式による）、三つ目は式(19)で求めた座屈荷重（2本の微分方程式による）である。それらの結果を表-1に示す。

表-1 から、式(13)、(14)による値は、有限要素解析による値（8要素分割以上であれば）また式(19)による値と同じであることが分かる。ただし、バネ定数 $k=50\text{kgf/cm}^2$ とし、境界条件はすべて両端単純支持とした。詳細の計算結果は示していないが、他のバネ定数の場合も三通りの方法で求めた座屈荷重は一致している。

表-1 不完全合成はりの座屈荷重の計算結果（ $\times 10^5$ ）

両端単純支持	η	N_v	N_e	N_{ve}
式(13)による解	1.1192	1.1192	—	0.4708
有限要素法による解	1要素	1.3608	—	0.5408
	4要素	1.1198	—	0.4710
	8要素	1.1192	—	0.4708
式(19)による解	—	1.1192	0.8127	0.4708

（単位：kgf）

なお、有限要素法を用いたのは、変断面はり、バネ定数の値、ジベルの配置間隔が異なった場合などの解析に用いるためであり、ここでは簡単な等断面はりでチェックした。

5. あとがき

本論文は、不完全合成はりの曲げ解析および座屈解析に関する微分方程式の誘導と解法を系統的に示した。さらに、それらの解析を1本の常微分方程式として解く場合と2本の常微分方程式として解く場合とを理論解析および数値解析により同じ結果が得られることを確認した。

参考文献

- 1) 土木学会編：鋼・コンクリート合成構造の設計ガイドライン、1989。
- 2) 島田静雄、熊沢周明：合成桁の理論と設計、山海堂、1973。
- 3) Koichi SATO : Elastic Buckling of Incomplete Composite Plates, J. Engrg. Mech., ASCE, 118(1), pp. 1-19, 1992。