

I - A254

条件付混合確率場における空間分布の推定

中央コンサルタンツ 正会員 伊藤秀一
鳥取大学工学部 正会員 野田 茂

1. まえがき

これまで、正規分布ならびに対数正規分布を含む条件付確率場に関するシミュレーション理論ならびに推定理論が考案されてきた^{1),2)}。しかし、得られた観測データを検討して見ると、異なる物理量に支配された確率場の存在が明らかになった。そこで、本研究では、互いに相関関係を有する正規分布と対数正規分布に従う混合確率場の条件付推定理論を提案し、単一の確率場における推定結果と比較する。

2. 確率論的補間手法

(1) 問題の設定

空間位置 X における正規確率変数 $V(X)$ の平均値を $m_V(X)$ 、分散を $\sigma^2(V(X))$ 、 X_i と X_j における共分散を $C(V(X_i), V(X_j))$ とする。また、対数正規確率変数 $W(X)$ の平均値は $m_W(X)$ 、分散は $\sigma^2(W(X))$ 、共分散は $C(W(X_i), W(X_j))$ である。正規確率変数と対数正規確率変数の共分散は $C(V(X_i), W(X_j))$ で表す。正規確率変数と対数正規確率変数は独立に生起するのではなく、また同一地点に生ずるとは限らない。このような条件下で観測データが与えられたとき、未観測点における物理量(正規確率変数、対数正規確率変数)の推定理論式を導く。

(2) 最適推定値と推定誤差分散

正規確率変数が n 地点で、対数正規確率変数が m 地点で観測され、それぞれ $V(X_i) (i=1 \sim n)$ 、 $W(X_j) (j=1 \sim m)$ で与えられているとする。このとき、正規確率変数、対数正規確率変数の不偏性ならびに最小誤差分散の条件式を導くと、以下になる。

まず、未観測点 X_{n+1} における正規確率変数の最適推定値は

$$\hat{V}_{K_e}(X_{n+1}) = m_V(X_{n+1}) + \sum_{i=1}^n \alpha_i (V(X_i) - m_V(X_i)) + \sum_{j=1}^m \beta_j \left\{ \ln W(X_j) - \left(\ln m_W(X_j) - \frac{1}{2} \sigma^2(\ln W(X_j)) \right) \right\} \quad (1)$$

で、その推定誤差分散は

$$\sigma_{K_e}^2(X_{n+1}) = \sigma^2(V(X_{n+1})) - \sum_{i=1}^n \alpha_i C(V(X_i), V(X_{n+1})) - \sum_{j=1}^m \beta_j C(\ln W(X_j), V(X_{n+1})) \quad (2)$$

で表せる。一方、 X_{m+1} 地点における対数正規確率変数の最適推定値は

$$\begin{aligned} & \hat{W}_K(X_{m+1}) \\ &= e^{\left[\ln m_W(X_{m+1}) + \sum_{i=1}^n \alpha'_i (V(X_i) - m_V(X_i)) + \sum_{j=1}^m \beta'_j \left\{ \ln W(X_j) - \left(\ln m_W(X_j) - \frac{1}{2} \sigma^2(\ln W(X_j)) \right) \right\} - \frac{1}{2} A \right]} \end{aligned} \quad (3)$$

で、推定誤差分散は

$$\sigma_{K_e}^2(X_{m+1}) = m_W^2(X_{m+1}) e^{\sigma^2(\ln W(X_{m+1}))} \left(e^{-\sigma_{K_e}^2(X_{m+1})} \right) \quad (4)$$

で求められる。ただし、式(4)における $\sigma_{K_e}^2(\cdot)$ は正規確率変数の推定誤差分散を表しており、次式のようにになる。

$$\begin{aligned} \sigma_{K_e}^2(X_{m+1}) &= \sigma^2(\ln W(X_{m+1})) - A \\ \text{ここに、} \quad A &= \sum_{i=1}^n \alpha'_i C(V(X_i), \ln W(X_{m+1})) + \sum_{j=1}^m \beta'_j C(\ln W(X_j), \ln W(X_{m+1})) \end{aligned} \quad (5)$$

式(1)、(2)における重み係数は次式の連立方程式を解くことによって求められる。

$$\left. \begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \alpha_i C(V(X_i), V(X_k)) + \sum_{j=1}^m \beta_j C(V(X_k), \ln W(X_j)) \\ &= C(V(X_k), V(X_{n+1})) \quad (k=1 \sim n) \\ & \sum_{i=1}^n \alpha_i C(V(X_i), \ln W(X_l)) + \sum_{j=1}^m \beta_j C(\ln W(X_l), \ln W(X_j)) \\ &= C(\ln W(X_l), V(X_{n+1})) \quad (l=1 \sim m) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

式(3)～(5)における重み係数は式(6)右辺における $V(X_{n+1})$ を $\ln W(X_{m+1})$ 、 α_i を α'_i 、 β_j を β'_j とおくことによって得られる。なお、この式は $E[(\hat{W}_K(X_{m+1}) - W_K(X_{m+1}))^2]$ を最小化することによって求められるが、これは $E[(\ln \hat{W}_K(X_{m+1}) - \ln W_K(X_{m+1}))^2]$ の最小化条件式と等価であることが証明される。

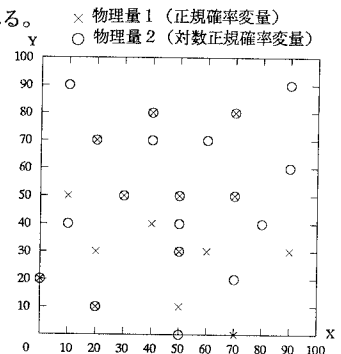


図1 観測点配置

混合確率場、条件付推定理論、最適推定値、推定誤差分散

〒451-0042 名古屋市西区那古野町2丁目11番23号 Tel:052-551-2541 Fax:052-551-2540
〒680-0945 鳥取市湖山町南4丁目101 Tel:0857-31-5307 Fax:0857-31-0882

3. 数値計算結果および考察

正規確率変量の無条件平均値を1、無条件分散を4、対数正規確率変量の無条件平均値を5、無条件分散を9とする。また、 V の共分散、 W の共分散ならびに正規確率変量としての V と $\ln W$ の共分散は次式で仮定する。

$$\left. \begin{aligned} C(V(X_i), V(X_j)) &= 4e^{-\frac{\|X_i - X_j\|}{8}} \\ C(W(X_i), W(X_j)) &= 9e^{-\frac{\|X_i - X_j\|}{4}} \\ C(V(X_i), \ln W(X_j)) &= \rho_e \sigma(V(X_i)) \sigma(\ln W(X_j)) e^{-\frac{\|X_i - X_j\|}{\sqrt{20}}} \\ \text{相関係数 } \rho_e &= 0.6 \end{aligned} \right\} (7)$$

正規確率変量と対数正規確率変数の関係、式(7)の共分散特性を基に図1の観測点において、コレスキー分解法により無条件場のシミュレーションを行い、観測データを得た。なお、図1において物理量1は正規確率変量、物理量2は対数正規確率変数である。

式(3)を適用して求めた対数正規確率変数 $W(X)$ の最適推定値を求めた例が図2である。同図よりわかるように、観測点付近の推定値は観測データに漸近している。観測点と推定点が一致すると、最適推定値はデータと完全に一致し、推定誤差分散は0となる。観測点から離れた遠方地点の最適推定値は無条件平均値5に近づいている。このような傾向は文献2)で示された単一確率場の推定結果と同様であるが、物理量1の相互影響を受けている点が明らかに異なる。

図2の結果を詳細に分析するため、 $Y=30$ の線上における最適推定値ならびに推定誤差分散を図3、図4に示す。図3は正規確率変数の、図4は対数正規確率変数の結果である。各図には無条件平均値、無条件共分散も示している。また、図3では文献1)の、図4では文献2)の方法による単一確率場の推定結果も併記した。

図3を見ると、単一確率場、混合確率場における推定結果は大差ないことがわかる。式(7)の共分散特性からすると、推定点から離れた観測データは推定結果にほとんど影響しない。最適推定値には若干の差異が見られるが、これは $Y=20$ の線上の2点、 $Y=30$ の線上の1点、 $Y=40$ の線上の3点における物理量2の観測データに左右されたためである。一方、推定誤差分散は観測データが関与せず、観測点の配置と総数によって決定されるため、図3のように単一確率場と混合確率場の推定誤差分散はほぼ同一となっている。

$Y=30$ の線上において、対数正規確率変量は正規確率変量と相互に相関しながら $X=50$ で、正規確率変量では $X=20, 50, 60, 90$ でデータが得られている。従って、図4の結果よりわかるように、観測点では最適推定値が観測データと一致し、推定誤差分散が0になっているが、 $X=20, 60, 90$ では物理量1のデータに左右されて推定誤差分散が小さくなり、推定結果は真値に近づいていると言える。これは2変量以上の相互関係を有する確率場に特有の結果である。混合確率場の観測データに対しては本理論のような展開が必要なことは自明であるが、数値分析からもこのことが実証できたと言える。

4. あとがき

本研究では、正規確率変量と対数正規確率変数の混合確率場における条件付推定結果を単一確率場の結果と比較検討した。その結果、最適推定値、推定誤差分散は他の確率変数の影響を強く受けることがわかった。複数の物理量に支配された確率場において支配要因のみを抽出して推定を行うと、誤った解釈を与え得る。異なる確率分布で支配された2変量以上の相互相関を有する混合確率場においては本理論のような展開ならびに分析の必要になった。

参考文献

- 1) 星谷 勝：条件付確率場のシミュレーション理論、土木学会論文集、No.459/I-22、pp.113～118、1993年1月。
- 2) 野田 茂・星谷 勝：条件付対数正規確率場の同定、第9回日本地震工学シンポジウム論文集、Vol.1、pp.247～252、1994年12月。

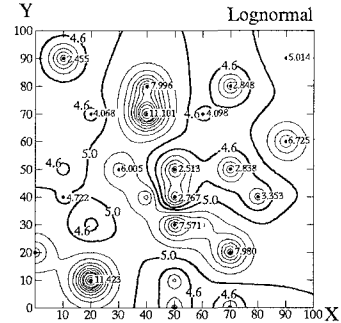
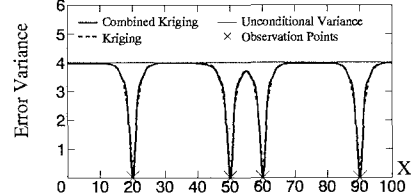
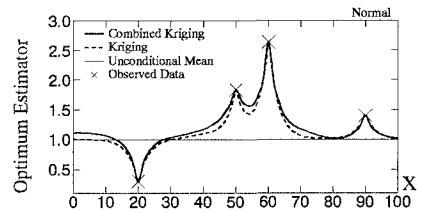
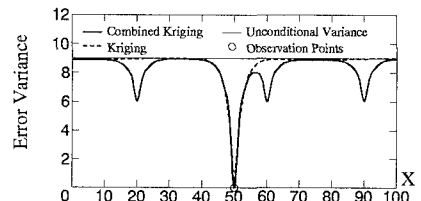
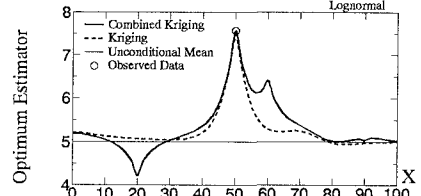


図2 混合確率場における対数正規確率変数の最適推定値


 図3 $Y=30$ の線上における正規確率変数の推定結果

 図4 $Y=30$ の線上における対数正規確率変数の推定結果