I－A253

条件付対数正規確率場のブロック推定

武蔵工業大学工学部　正　星谷　勝
日本インフォメーション　非　小泉 智香
鳥取大学工学部　正　野田　茂

1. まえがき

空間上の多くの地点にセンサーを設置して観測データを得ることができれば理想的である。何故ならば、有限区域内の離散観測点でデータが得られると、あるブロックの最大地動などを正確に推定することができるからである。しかし現実には多くのデータを得ることは容易でなく、またデータには限りがある。そこで、本研究では、不確定要因を含む物理量を空間的・時間的に不規則に分布する確率変数として捉え、有限地点における観測データを基にして未観測ブロックにおける物理量の空間分布を推定する。なお、基本的な理論式は既に文献 1) で提案しているが、ここでは点推定[2)]の結果と比較しながら、ブロックの大きさが推定結果に及ぼす影響について分析する。

2. 問題の設定

対数正規確率場において、 x_i 地点の物理量 $W(x_i)$ の平均値は $m(x_i)$ 、分散は $\sigma^2(x_i)$ 、 x_i 地点と x_j 地点の共分散は $C(W(x_i),W(x_j))$ で表せる。一方、 $W(x_i)$ を変換した正規確率場では、 $\ln W(x_i)$ に対し、平均値 $m_e(x_i)$ 、分散$\sigma_e^2(x_i)$、共分散 $C_e(W(x_i),W(x_j))$ を定義する。これら確率構造は既知であると仮定する。

今、面積 (あるいは体積) $|S|$ を有するあるブロック Sの平均的物理量は、面積分 (あるいは体積積分) によって、次式のように表す。ただし、x はブロック S 内の任意地点である。

$$W_S=\frac{1}{|S|}\int_{x\in S}W(x)dx \tag{1}$$

このとき、異なる 2 つのブロック S、S' における平均的物理量の共分散は

$$C(W_S,W_{S'})=\frac{1}{|S||S'|}\int_{x\in S}\int_{x'\in S'}m(x)m(x')(e^{C_e(\overline{xx'})}-1)dxdx' \tag{2}$$

となる。ここに、 x' はブロック S' 内の任意地点を、$C_e(\overline{xx'})$ は距離$\overline{xx'}$だけ離れた 2 点 x と x' 間の物理量の共分散を意味する。

本研究では、N地点で観測データ $\underline{W}(x_i)(i=1\sim N)$ が得られた条件下で、ブロック S における平均的物理量の推定値 $\widehat{\underline{W}}_S$ を求める。

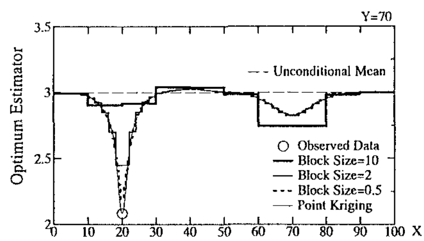

図 1　Y=70 の線上における最適推定値

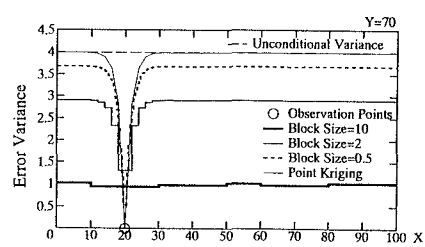

図 2　Y=70 の線上における推定誤差分散

3. 最適推定値と推定誤差分散

不偏性の条件から、推定値$\widehat{W_S}$に対して

$$E[\widehat{W_S}]=E[W_S]=\frac{1}{|S|}\int_{x\in S}m(x)dx \tag{3}$$

が成り立つので、ブロックの最適推定値は次式で与えられる。なお、式の誘導については文献 1) を参照されたい。

$$\widehat{\underline{W}}_S=\exp\left[\ln\left(\frac{1}{|S|}\int_{x\in S}m(x)dx\Big/\prod_{i=1}^{N}m(x_i)^{\lambda_i}\right)+\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\ln\underline{W}(x_i)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\left\{\sigma_e^2(x_i)-\sum_{j=1}^{N}\lambda_jC_e(W(x_i),W(x_j))\right\}\right] \tag{4}$$

上式において、重み係数の$\lambda_i(i=1\sim N)$ は最小誤差分散推定から求められる。つまり、次式の推定誤差分散を最小化するように決めればよい。

$$\sigma^2(\widehat{W_S}-W_S)=\sigma^2(\widehat{W_S})+\sigma^2(W_S)-2C(\widehat{W_S},W_S) \tag{5}$$

式 (5) 右辺の各項を平均値 $m(x_i)$、共分散 $C_e(W(x_i),W(x_j))$、重み係数λ_iで明示した後それをλ_kで偏微分すると、次式の非線形連立方程式が得られる。式 (6) を解いて求められるλ_kを式 (4) に代入すると最適推定値が、また式 (5) に代入すると最小誤差分散が求められる。

対数正規確率場、条件付推定理論、ブロック推定、点推定
〒158-0087　東京都世田谷区玉堤 1-28-1　Tel:03-3701-1853　Fax:03-5707-2187
〒532-0003　大阪市淀川区宮原 4-1-14 住友生命新大阪北ビル　Tel:06-397-0510　Fax:06-397-0513
〒680-0947　鳥取市湖山町南 4-101　Tel:0857-31-5307　Fax:0857-31-0882

$$\sum_{j=1}^{N}\lambda_j C_e(W(x_k),W(x_j))=\frac{\displaystyle\int_{x\in S} m(x)C_e(W(x_k),W(x))\exp\left(\sum_{i=1}^{N}\lambda_i C_e(W(x_i),W(x)\right)dx}{\displaystyle\exp\left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\lambda_i\lambda_j C_e(W(x_i),W(x_j))\right)\int_{x\in S} m(x)dx} \quad (k=1\sim N) \tag{6}$$

4. 数値計算例および考察

対数正規確率場の平均値を 3、共分散を $4\exp\left(-\|x_i-x_j\|/\sqrt{10}\right)$ として、2 次元平面場での数値分析を行う。観測点配置を考え、観測データは確率場の特性を満足するようにシミュレーションによって得た。ブロックの形状は正方形とし、その長さは 7 通り (0.25, 0.5, 1, 2, 4, 5, 10) を想定した。Kriging による点推定も行い、これを厳密解として条件付ブロック推定の結果と比較する。

数値計算に当たっては式 (6) の非線形連立方程式、式 (4)、式 (5) 右辺の 3 つの項において多重積分 (2 重、4 重) を解く必要があるため、ブレント法、B スプライン 2 次元補間法、変形ロンバーク積分法を用いた。式 (6) の重み係数を解くためには適切な初期値を与えて反復収束計算を実施しなければならない。そこで、対象ブロックの中心に推定点を設け、その地点で点推定に対応した重み係数を求め、それを初期値として与えた。

ここではブロックの大きさを変化させて文献 2) で提案した点推定法の結果と対比させることにより、ブロック推定の有効性を吟味する。図 1 は $Y=40$ の線上における最適推定値、図 2 はその推定誤差分散である。図 3 には $X=40$、$Y=40$ の点とその周辺ブロックにおける最適推定値を示す。図 1、図 2 において、○はその線上に位置する観測データ、観測点を表す。各図には $|S|\to 0$ のときの点推定の結果も併記している。

図よりわかるように、点推定法によると、推定点が観測点に一致すると、最適推定値は観測データに、推定誤差分散は 0 になる。また観測点から離れた推定点では無条件平均値、無条件分散に漸近していく傾向にある。$Y=30$、50 の線上には各 4 観測点が存在する。このため、$X=40$、$Y=40$ の観測点以外においても、$Y=40$ の線上の最適推定値はこれら 8 観測点のデータに左右されて変動している。一方、推定誤差分散は観測データに依存しないため、$X=40$、$Y=40$ の点周辺でのみ値が小さくなっている。

ブロックの大きさが小さいほど、ブロックの推定結果は点推定の結果に近づいている。一方、ブロックが大きくなると、誤差分散は平滑化される傾向にあり、小さくなっている。その傾向は観測点から離れた遠方の推定点ほど顕著である。遠方場では式 (5) 右辺の第 1 項と第 3 項が 0 に近づくので、推定誤差分散は式 (5) 右辺の第 2 項で与えられる平均的物理量 W_s の分散のみに左右される。このとき点推定による式は無条件分散に至る。ブロック推定では式 (5) 右辺の第 2 項の値が無条件分散よりも小さい。誤差分散が小さくなると、最適推定値は真値に近づく特徴を有するが、条件付ブロック推定では点推定の特性を示さないことがわかる。

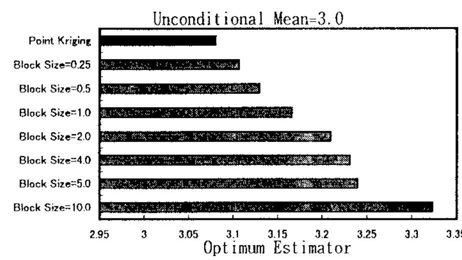

図 3　ある点とその周辺ブロックにおける最適推定値

5. あとがき

Kriging は、推定値だけでなく、誤差分散をも評価できる手法である。点推定では、1) 推定点が観測点と一致すると、最適推定値は観測データに一致し、推定誤差分散は 0 になる、2) 観測点から離れると、最適推定値、推定誤差分散は無条件平均値、無条件分散に漸近する、3) 内挿点の最適推定値は無条件平均値に近づくように補間されるという特徴を有する。また、誤差分散は推定精度を定量的に表す指標であるので、その値が小さいと、最適推定値は真値に近づく性質がある。一方、ブロック推定では上述した特徴を示さないという新たな知見が得られた。つまり、推定誤差分散は最適推定値を真に表す指標とはならない。また、ブロックの大きさの決定が推定結果に重大な影響を及ぼすことが明らかになった。

参考文献

1) 野田　茂・星谷　勝：対数正規確率場における条件付ブロック推定、土木学会第 48 回年次学術講演会講演概要集、第 1 部、pp.1000〜1001、1993 年 9 月.
2) 野田　茂・星谷　勝：条件付対数正規確率場の同定、第 9 回日本地震工学シンポジウム (1994) 論文集、Vol.1, pp.247〜252、1994 年 12 月.