I－A251

逆解析によって推定されたモデルの信頼性に関する考察

東電設計　正会員　吉田郁政
武蔵工業大学　学生員　佐々木卓也
武蔵工業大学　正会員　星谷勝

1．はじめに

最近では得られた解の解釈や精度の評価まで踏み込んだ逆解析の研究がみられるようになってきた。逆解析による解の精度の評価ができれば，その精度を高めるような配置計画が好ましいことになる。このような観点からの観測点の配置計画も最近の研究テーマの一つとなっている。このような研究を進める上で推定される逆解析精度の意味を明らかにしておくことは重要な課題である。

2．逆解析における全空間と部分空間　未知パラメタ空間をn次元のベクトル空間と考えると，未知パラメタベクトル$\boldsymbol{x}$は基底ベクトル$\boldsymbol{u}_i$を用いて　$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Ur}$　と表すことができる．ここで，$\boldsymbol{r}$は基底ベクトルの展開係数から成るベクトルであり，$\boldsymbol{U}$は基底ベクトルを横に並べた行列である．一般に$\boldsymbol{r}$と$\boldsymbol{x}$とは一致しないので，以下，$\boldsymbol{x}$を未知パラメタベクトル，$\boldsymbol{r}$を未知量ベクトルと呼び区別する．ここで全ての基底ベクトルを逆解析の対象とするのではなく、いくつかの基底ベクトルについてのみ逆解析の対象とすることを考える。逆解析の対象として選ばれたn_1個の基底ベクトルを並べた行列を$\boldsymbol{U}_1$，選ばれなかったn_2個のベクトルから成る行列を$\boldsymbol{U}_2$とする．従って$\boldsymbol{U}_1$は$n\times n_1$の行列，$\boldsymbol{U}_2$は$n\times n_2$の行列，ただし$n_1+n_2=n$である．未知量ベクトルは基底ベクトルの展開係数なので$\boldsymbol{U}_1$，$\boldsymbol{U}_2$に対応して，$\boldsymbol{r}_1$，$\boldsymbol{r}_2$に分けることができる．以下，本報告では全空間に対して$\boldsymbol{U}_1$で張られる空間を逆解析の対象とする部分空間，$\boldsymbol{U}_2$で張られる空間を補空間と呼ぶ．$\boldsymbol{r}_1$に関する事前の共分散行列は　$\boldsymbol{M}_{r11}=\boldsymbol{U}_1^T\boldsymbol{MU}_1$ で与えられる．ここで$\boldsymbol{M}$は$\boldsymbol{x}$に関して事前情報として与えられる共分散行列である。また$\boldsymbol{r}_1$の事後の共分散行列は次式で与えられる。

$$\boldsymbol{P}_{r11}=(\boldsymbol{M}_{r11}^{-1}+\boldsymbol{H}_{r1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{H}_{r1})^{-1} \tag{1}$$

ここで、$\boldsymbol{R}$ は観測量誤差の共分散行列、$\boldsymbol{H}_r$（以下に現れる $\boldsymbol{H}_x$）は観測量に対する未知量（あるいは未知パラメタ）の微分であるヤコビアン行列である。未知パラメタ$\boldsymbol{x}$の事後の共分散行列$\boldsymbol{P}_x$は次式で表すことができる．

$$\boldsymbol{P}_x=\boldsymbol{U}_1\boldsymbol{P}_{r11}\boldsymbol{U}_1^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{U}_2\boldsymbol{P}_{r22}\boldsymbol{U}_2^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{U}_1\boldsymbol{P}_{r12}\boldsymbol{U}_2^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{U}_2\boldsymbol{P}_{r21}\boldsymbol{U}_1^{\mathrm{T}} \tag{2}$$

$\boldsymbol{P}_{r11}$ は式(1)で求めることができ，$\boldsymbol{P}_{r22}$ は更新されていない部分の共分散行列なので事前情報から $\boldsymbol{P}_{r22}=\boldsymbol{U}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{MU}_2$　となる。式(2)右辺第1,2項は以上により既知となるが，第3,4項は$\boldsymbol{P}_{r12}(=\boldsymbol{P}_{r21}^{\mathrm{T}})$が不明である．$\boldsymbol{P}_{r12}$ は逆解析の対象とした基底ベクトルの展開係数と，対象としない基底ベクトルの展開係数の共分散を表している．$\boldsymbol{r}_2$ を逆解析の対象としないということは観測情報の影響を全く受けないとことになる．話を簡単にするため事前情報に関して$\boldsymbol{r}_1$と$\boldsymbol{r}_2$が相関を持たないように$\boldsymbol{U}_1$ と$\boldsymbol{U}_2$を定めることとすると（$\boldsymbol{U}_1^T\boldsymbol{MU}_1=0$）、事前情報も観測情報も，$\boldsymbol{r}_1$と$\boldsymbol{r}_2$は相互に関係を持たないことになるので$\boldsymbol{P}_{r12}=0$とおく．以上により未知パラメタの事後の共分散行列$\boldsymbol{P}_x$は次式で求められる．

$$\boldsymbol{P}_x=\boldsymbol{U}_1\boldsymbol{P}_{r11}\boldsymbol{U}_1^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{U}_2\boldsymbol{U}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{MU}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}_2 \tag{3}$$

2．数値計算例　図-1に示すモデルを用いて逆解析によるモデルの信頼性評価を行う。例題は水平成層の8層（各層1.0m）から成り，未知パラメタは各層のヤング率8個とした．観測量は，地表に作用している分布荷重によって生じる鉛直方向の相対変位を8点で観測するとする．このような観測情報から，深い層の物性値を各層別々に推定することが困難であることは，直感的にも想像がつく．そのため，未知量を経験的に減らすことが一般に行われる．図-2に未知量の数を1個から4個にしたときのモデル分割のパターンを示す。前述の逆解析の対象とする部分空間、その補空間という観点から考えると未知量1個のケースは部分空間が

キーワード：逆解析、未知パラメタ空間、基底ベクトル、信頼性、誤差評価
東京都台東区東上野3-3-3 東電設計(株) 原子力土木部 tel 03-5818-7663 e-mail:dyoshida@civil.tepsco.co.jp

１次元であり、その基底ベクトルを$\boldsymbol{u}_1^{T}=\{1,1,1,1,1,1,1,1\}$とした場合に相当する。各ケースについて事後の標準偏差を求め事前の標準偏差で基準化して図-3 に示す。図には全空間８次元を対象とした場合、共分散行列算定に際して補空間を無視した場合、すなわち式(3)の右辺第２項を無視した場合、補空間も考慮した場合について示した。補空間を考慮しないで算定すると未知量が少なければ少ないほど推定誤差の標準偏差が小さくなりモデルの信頼性が向上するという結果となる。一方、補空間も考慮すると未知量が多くなるに従い、すなわち逆解析の対象とする部分空間が大きくなるほど信頼性が大きくなる結果となった。観測の質と量に従って推定するパラメタの数を決めることが一般に行われるが、未知パラメタ空間の部分空間を推定しているという認識が重要である。部分空間をそのまま全空間としてモデルの信頼性を議論すると未知パラメタは少ない程良いという不合理な結果となる。

例題にもあるように同じ未知量の数であってもその取り方によって信頼性は異なる。従って適切な部分空間の大きさだけではなく、その基底ベクトルの決め方も重要である。部分空間の基底ベクトルは未知パラメタの事後の共分散行列の固有ベクトルから決める方法が合理的であろう。[1)]

参考文献

1) 吉田郁政：未知パラメタ空間の基底変換を用いた逆解析,土木学会論文集,NO.577/I-41,pp.205-215,1997.10

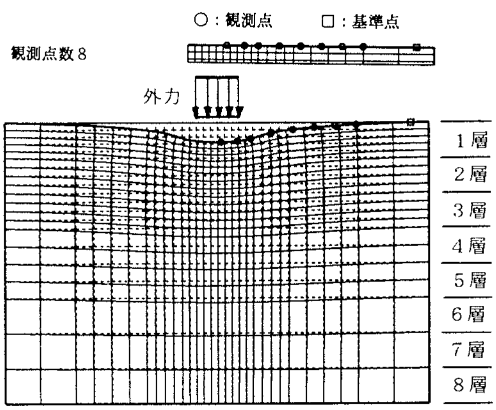

図-1　例題としたモデル

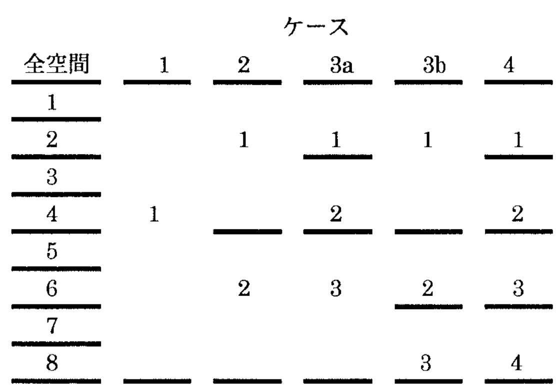

図-2　未知パラメタの設定のパターン

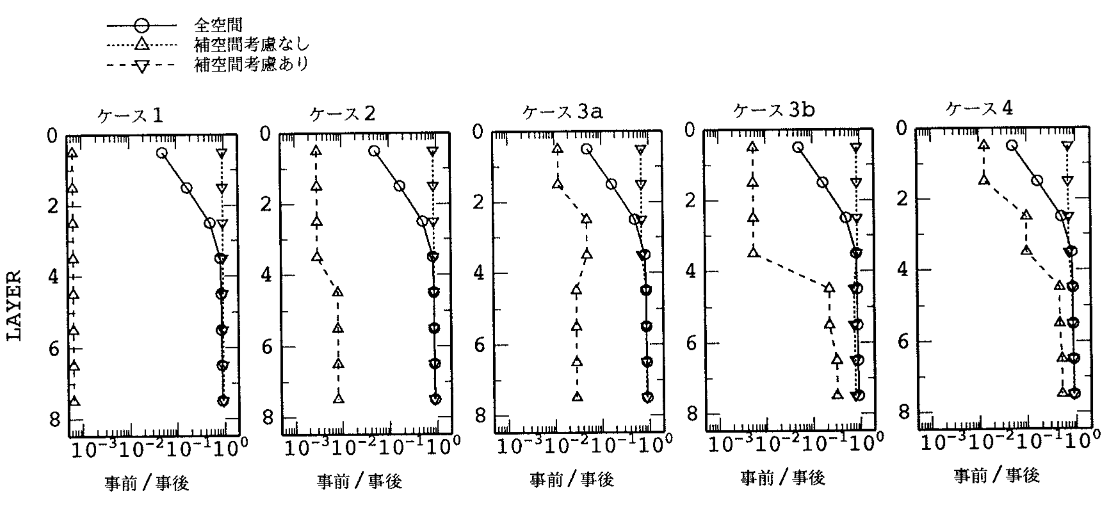

図-3　未知パラメタの事前と事後の標準偏差の比