

I - A246

近接固有値を有する構造物の振動特性推定

（株）熊谷組 正 員○山森 和博
長崎大学工学部 正 員 岡林 隆敏
横河工事（株） 正 員 田村 太郎

1. はじめに

吊床版橋やキャットウォークのような吊形式の構造物は、固有振動数が互いに接近しており、振動実験データに Beating（うなり）現象が発生する場合がある。うなりを伴う実測波形から、同定手法すなわち、多自由度法¹⁾による曲線適合、時間領域で推定する方法^{2,3)}などが提案されている。本研究では、振動数が接近している構造物の応答を、2自由度系としてモデル化し、モード解析法による時間領域と周波数領域における推定精度の検討を行った。推定事例として、2自由度系モデルのシミュレーション波形、吊床版橋のシミュレーション波形、実測波形より振動特性推定を行ったものである。

2. 近接固有値を有する2自由度系の動的応答

(1) 2自由度系の解の性質

図-1のようなばねで結合された2自由度系モデルに、外力が作用する場合、運動方程式は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + c_1 \dot{x}_1 + k_1 x_1 + k_{12}(x_1 - x_2) &= f_1 \\ m_2 \ddot{x}_2 + c_2 \dot{x}_2 + k_2 x_2 - k_{12}(x_1 - x_2) &= f_2 \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、質量 $m_1 = m_2 = m$ 、ばね定数 $k_1 = k_2 = k$ 、 $k_{12} = \gamma k$ とし、非減衰振動を考えると、系の固有円振動数は、

$$\omega_1 = \sqrt{k/m}, \quad \omega_2 = \sqrt{k(1+2\gamma)/m} \quad (2)$$

となる。このように質量、ばね定数が互いに等しい場合、 γ 値により系の振動数が接近したり、離れたりする性質を持つ。近接固有値を有する構造物を、 γ 値を変化させ、近接した振動数を有する2自由度系でモデル化する。

(2) 衝撃加振シミュレーション

シミュレーションに用いた2自由度系モデルは、 $m_1 = m_2 = 1.0\text{tf}$ 、 $k_1 = k_2 = 0.005$ 、 $f_1 = 1.0\text{Hz}$ とし、 γ を変化させ、 $f_2 = 1.1\text{Hz}$ 、 1.06Hz 、 1.02Hz となるような3ケースとした。図-2に3ケースにおける1質点目の周波数応答を示す。このようなモデルに、衝撃力を1質点目に加え、衝撃加振シミュレーションを行った。図-3に1質点目の3ケースにおける変位応答を示す。この各質点の変位応答波形を用いて、時間領域と周波数領域における曲線適合から振動特性の推定を行う。シミュレーションでのデータは、サンプリング時間 $\Delta = 0.01\text{sec}$ 、データ数 $N = 4096$ とした。

3. 2自由度系の曲線適合理論と精度の検証

(1) 時間領域における曲線適合

p 点に単位衝撃荷重 $\delta_p(t)$ が作用する n 自由度系の m 次と $m+1$ 次に近接した振動数を有する系の変位応答 $x_i(t)$ は、次式で表される。

$$x_i(t) = \sum_{k=m}^{m+1} A_k \exp(-h_k \omega_k t) \sin(\omega_k t + \theta_k) \quad (3)$$

$A_k = \phi_{ik} \phi_{pk} / \omega_{dk}$ 、 $\omega_{dk} = \omega_k \sqrt{1 - h_k^2}$ 、 ϕ_{ik} 、 ϕ_{pk} : i, p 点の k 次振動モード、 ω_k 、 h_k 、 θ_k : k 次振動における固有円振動数、減衰定数、位相である。そこで、非線形最小二乗法により測定データ $\hat{x}_i(t)$ と(3)式を曲線適合させ、誤差 ε を最小にするようなパラメータを求める。

キーワード：近接固有値 構造同定 モード解析法 時間領域 周波数領域

連絡先：長崎大学工学部社会開発工学科（〒852-8131 長崎市文教町1-14 TEL(095)847-1111 FAX(095)848-3624）

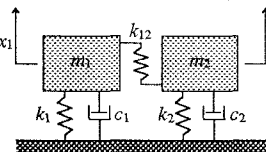


図-1 2自由度系モデル

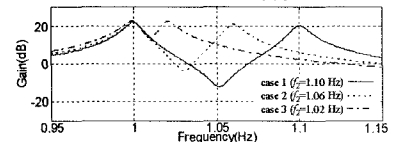
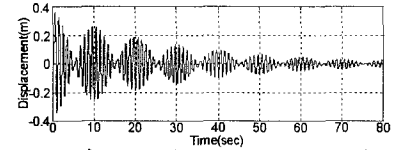
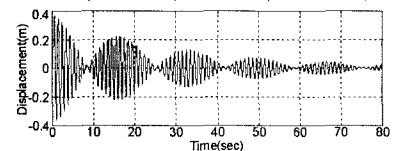


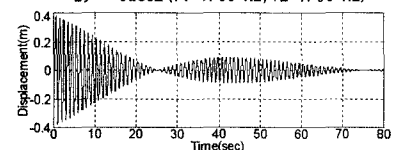
図-2 周波数応答の変化（1質点）



a) case1 (f1=1.00 Hz, f2=1.10 Hz)



b) case2 (f1=1.00 Hz, f2=1.06 Hz)



c) case3 (f1=1.00 Hz, f2=1.02 Hz)

図-3 変位応答波形（1質点）

表-1 推定結果（2自由度系モデル）

		仮 定 値		時間領域		周波数領域	
		固有振動数	減衰定数	固有振動数	減衰定数	固有振動数	減衰定数
case 1	1次	1.0000	0.0050	1.0000	0.0050	1.0002	0.0049
	2次	1.1000	0.0050	1.1000	0.0050	1.0997	0.0054
case 2	1次	1.0000	0.0050	1.0000	0.0050	1.0002	0.0053
	2次	1.0600	0.0050	1.0600	0.0050	1.0603	0.0051
case 3	1次	1.0000	0.0050	1.0000	0.0050	1.0001	0.0047
	2次	1.0200	0.0050	1.0200	0.0050	1.0201	0.0046

$$\varepsilon = \sum_{s=0}^{N-1} [\tilde{x}_t(t_s) - x_t(t_s)]^2 \quad (N: \text{データ数}) \quad (4)$$

(2) 周波数領域における曲線適合

変位応答 $x_t(t)$ 、単位衝撃荷重 $\delta_p(t)$ のフーリエ変換を $X_t(\omega)$ 、 $F_p(\omega)$ とすると、近接固有値を有する系の周波数伝達関数は、次式で与えられる。

$$G_{tp}(\omega) = \frac{X_t(\omega)}{F_p(\omega)} = \sum_{k=m}^{m+1} \frac{\phi_{tk} \phi_{pk}}{-\omega^2 + \omega_{tk}^2 + 2i\eta_k \omega_k \omega} \quad (5)$$

ここで、(4)式と同様に、測定データのコンプライアンス $\tilde{G}_{tp}(\omega)$ と(5)式を曲線適合させ、誤差 ε を最小にするようなパラメータを求める。

(3) 推定精度の検証

表-1に、推定結果を示す。推定値は、各質点より得られた値の平均値を示している。時間領域における各ケースでの推定値は、固有振動数、減衰定数とともに全て一致している。周波数領域での推定値は、時間領域と比べると推定値に差がみられるが、良好な推定値が得られている。

4. 吊床版橋への適用

(1) 吊床版橋

図-4のような吊床版橋、A橋とB橋およびC橋において、衝撃加振試験を行った。各吊床版橋を1/4L地点を加振した場合、図-5に示すような実測波形に1次振動と3次振動によるうなりが発生している。そこで、衝撃加振シミュレーション波形、実測波形を用いて時間領域と周波数領域における振動特性推定を行った。表-2に各吊床版橋の諸元を示す。

(2) 衝撃加振シミュレーションの概要

各吊床版橋を、23節点の等価な梁モデルとして有限要素法でモデル化した。減衰定数は、うなりを伴わない実測波形で得られた値を用いている。衝撃加振力は、1/4L地点に加え、1/8L, 1/4L, 3/8L, 1/2L, 5/8L, 3/4L, 7/8L地点の速度を観測し、得られた各点の波形から振動特性推定を行う。図-6にB橋の1/4L地点のシミュレーション波形を示す。ここで、サンプリング時間 $\Delta t = 0.01 \text{ sec}$ 、データ数 $N = 4096$ とした。

(3) 推定精度の比較

各吊床版橋のシミュレーション波形、実測波形からの推定結果を表-3、表-4に示す。表-4中の実測値は、金沢大学で得られた値を参考値として示した。表-3における推定値は、時間・周波数領域ともに誤差も小さく、良好な推定値が得られている。解析値と比較すると、時間領域における方法が良いが確認できる。表-4では、時間領域と周波数領域を比較すると、固有振動数はほぼ一致した推定値である。減衰定数は、誤差があり、ばらつきが見られる。また、実測値と比較すると、時間領域の推定値と良く一致している。図-7にB橋の振動モード推定結果を示す。シミュレーションでは、時間・周波数領域ともに良い推定値を示している。実測でも、時間・周波数領域ともに同等の推定値を示していると考えられる。解析値と比較すると、若干誤差が見られるが良好な推定を示している。

5. まとめ

本研究は、うなりを伴う波形を2自由度系として考え、時間領域と周波数領域において振動特性推定の検討を行った。そこで、2自由度系モデルと吊床版橋のシミュレーション波形、実測波形から振動特性推定が可能であることを確認した。時間領域と周波数領域での推定精度を比較すると、周波数領域では、推定時間は短い、初期値や周波数分解能の影響により推定値にばらつきが生じる。時間領域では、推定時間は長い、安定した推定値が得られることが確認できる。

【参考文献】1) 長松昭男：モード解析，培風館，1985.7. 2) 譜岐康博他：Beating 波形からの各単振動の対数減衰率算出法，第2回橋梁振動に関するコロキウム論文報告集，pp.109-114，1989.8. 3) 岩本政己他：自由振動減衰波形からの固有振動数の近接した2自由度線形系のパラメータ同定，土木学会論文集，No.450/I-20，pp.141-149，1992.7.



図-4 吊床版橋一般図

表-2 各吊床版橋の諸元

	A 橋	B 橋	C 橋
橋 長 (m)	88.0	85.0	137.0
支間長 (m)	78.0	76.5	123.0
サグ比	1/34.7	1/34.8	1/30.0
有効幅員 (m)	1.50	1.50	1.50

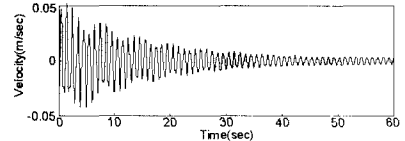


図-5 実測波形 (B橋 1/4L)

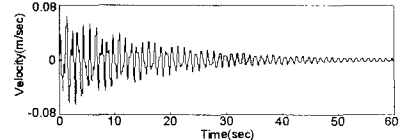


図-6 シミュレーション波形 (B橋 1/4L)

表-3 推定結果 (シミュレーション)

		解 析 値		時間領域		周波数領域	
		固有振動数	減衰定数	固有振動数	減衰定数	固有振動数	減衰定数
A 橋	1次	0.9269	0.0085	0.9270	0.0085	0.9272	0.0087
	3次	1.6603	0.0059	1.6604	0.0059	1.6603	0.0062
B 橋	1次	0.9437	0.0090	0.9437	0.0090	0.9436	0.0095
	3次	1.7021	0.0073	1.7028	0.0073	1.7021	0.0063
C 橋	1次	0.6223	0.0064	0.6223	0.0066	0.6224	0.0067
	3次	1.1454	0.0056	1.1458	0.0055	1.1456	0.0054

表-4 推定結果 (実測)

		実測値 (金沢大学)		時間領域		周波数領域	
		固有振動数	減衰定数	固有振動数	減衰定数	固有振動数	減衰定数
A 橋	1次	0.9175	0.0072	0.9169	0.0071	0.9133	0.0081
	3次	1.8710	0.0069	1.8700	0.0071	1.8655	0.0050
B 橋	1次	0.9970	0.0095	0.9965	0.0095	0.9945	0.0098
	3次	1.8260	0.0089	1.8260	0.0085	1.8302	0.0070
C 橋	1次	0.6190	0.0019	0.6193	0.0023	0.6194	0.0045
	3次	1.2610	0.0062	1.2612	0.0060	1.2595	0.0058

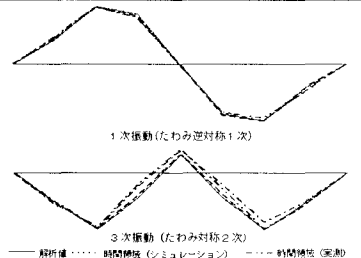


図-7 振動モードの推定結果 (B橋)